MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA

EXPLORANDO O ENSINO DA MATEMÁTICA

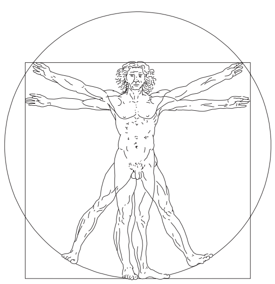
ATIVIDADES

VOLUME II

BRASÍLIA
2004

A Matemática está presente na vida cotidiana de todo cidadão, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. No momento em que abrimos os olhos pela manhã e olhamos a hora no despertador, estamos "lendo" na linguagem matemática, exercitando nossa abstração e utilizando conhecimentos matemáticos que a humanidade levou séculos para construir. É quase impossível abrir uma página de jornal, cuja compreensão não requeira um certo conhecimento matemático e um domínio mínimo da linguagem que lhe é própria – porcentagens, gráficos ou tabelas são necessários na descrição e na análise de vários assuntos. Na sociedade atual, a Matemática é cada vez mais solicitada para descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana. Um médico que interpreta um

APRESENTAÇÃO



eletrocardiograma está utilizando um modelo matemático; ao dar um diagnóstico, está utilizando o raciocínio matemático e empregando conhecimentos de estatística. Um pedreiro utiliza um método prático para construir ângulos retos que já era empregado pelos egípcios na época dos faraós. Uma costureira, ao cortar uma peça, criar um modelo, pratica sua visão espacial e resolve problemas de geometria.

Apesar de permear praticamente todas as áreas do conhecimento, nem sempre é fácil (e, por vezes, parece impossível) mostrar ao estudante aplicações interessantes e realistas dos temas a serem tratados ou motivá-los com problemas contextualizados. O professor, quase sempre, não encontra ajuda ou apoio para realizar essa tarefa de motivar e instigar o aluno, relacionando a Matemática com outras áreas de estudo e identificando, no nosso cotidiano, a presença de conteúdos que são desenvolvidos em sala de aula. Para isso, é importante compartilhar experiências que já foram testadas na prática e é essencial que o professor tenha contacto com textos de leitu-

APRESENTAÇÃO

ra acessível, que ampliem seus horizontes e aprofundem seus conhecimentos.

Inserir o conteúdo em contexto mais amplo, provocando a curiosidade do aluno, ajuda a criar a base para um aprendizado sólido que só será alcançado através da real compreensão dos processos envolvidos na construção do conhecimento. Não se trata, é claro, de repetir um caminho que a humanidade levou séculos para percorrer. No entanto, é preciso incentivar o aluno a formular novos problemas, a tentar resolver questões "do seu jeito". O espaço para tentativa e erro é importante para desenvolver familiaridade com o raciocínio matemático e o uso adequado da linguagem. Da mesma forma que é possível ler um texto palavra após palavra, sem compreender seu conteúdo, é também possível aprender algumas "regrinhas" e utilizar a Matemática de forma automática.

Com o objetivo de ajudar o professor nos vários campos apontados, reunimos uma coletânea de artigos extraídos da Revista do Professor de Matemática (RPM) – uma publicação da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), com apoio da Universidade de São Paulo.

O material aqui apresentado sugere abordagem contextualizada e o uso de material concreto e apresenta uma variedade de situações cotidianas em que a matemática se faz presente. Ao mesmo tempo, explora, em cada caso, o conteúdo de forma rigorosa e sistemática, levanta problemas e indica soluções e, nesse processo, expõe os meandros do raciocínio matemático.

Os textos escolhidos estão distribuídos em dois volumes e abordam conteúdos curriculares da 5ª à 8ª série do ensino fundamental.

No primeiro volume incluímos artigos que tratam de História, Geografia, Astronomia, situações do cotidiano, cultura geral, crônicas e problemas. Enfim, muito do que possa fornecer situações com modelagem matemática, ligando a Matemática ao desenvolvimento do conhecimento humano de diversas áreas, foi aqui reunido. Os artigos possibilitam que o professor amplie sua visão e insira os conteúdos matemáticos num contexto amplo e interdisciplinar, de modo que possam ser utilizados para desenvolver atividades interessantes junto aos estudantes, explorando novas perspectivas e permitindo um outro enfoque.

No segundo volume são sugeridas atividades em sala de aula, utilizando materiais de fácil acesso (canudos, cartolina, jornal, barbante, etc.) ou explorando situações do cotidiano em que a matemática está presente. A atividade lúdica está sempre ligada a conteúdos matemáticos, que são explorados e aprofundados.

O professor e educador George Polya (1887-1985), autor do livro *A arte de resolver problemas* , afirmava, muito adequadamente, que para ensinar é preciso saber muito mais do que se ensina, é preciso conhecer sua matéria, ter interesse e entusiasmo por ela. Com estes dois volumes esperamos compartilhar com nossos colegas professores experiências bem sucedidas em sala de aula e, sobretudo, um pouco da beleza e da riqueza da Matemática.

É com grande entusiasmo que a Secretaria de Educação Infantil e Fundamental realiza este projeto, agradecendo a participação da comunidade matemática, por meio da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM).

VOLUME 2

ATIVIDADES EM SALA DE AULA

Introdução

Uma das grandes dificuldades no ensino da Matemática é a linguagem que precisa ser utilizada. Muitas vezes percebemos que os alunos compreendem a “idéia” mas não são capazes de manipular a linguagem. Outras vezes, o que é pior, manipulam a linguagem de forma automática sem apreender seu significado.

Na coletânea de textos aqui apresentada descrevem-se atividades lúdicas e instigantes a serem desenvolvidas em sala de aula, juntamente com sugestões de que conteúdos podem ser motivados, melhor entendidos, ou descobertos pelos alunos no decorrer das atividades. Procura-se trabalhar com objetos, jogos, materiais concretos, ou situações do cotidiano do aluno, mostrando que a Matemática está presente na compreensão e solução de problemas do dia-a-dia.

O objetivo é fazer com que o aluno, diante de um problema concreto, “traduza” a situação para a linguagem matemática e resolva o problema. Percorrendo esse caminho, ficam mais claros a motivação dos conteúdos e o papel da linguagem para expressar conceitos e guiar o pensamento lógico.

Vejamos alguns exemplos:

Atividades como *Fechando o dominó* e *O jogo de dominós* levam a perguntas sobre fatos conhecidos do jogo de dominós, cujas respostas envolvem o estudo de paridade numérica, contagem e operações aritméticas.

O adivinho indiscreto descreve uma mágica intrigante, que estimula a curiosidade dos alunos e, despertado o interesse em entender como a mágica é possível, permite o estudo de representação na base dois, de maneira interessante e agradável. O professor pode, inclusive, modificar a mágica de modo a motivar o estudo de representação na base decimal ou em outras bases.

A Geometria, operações aritméticas e o cálculo de raízes aparecem juntos em atividades como *Origami*s (dobraduras) e *Nomogramas de papel*.

A utilização de situações da realidade está em atividades como *Você sabe ler seu relógio de luz?* ou *Como é feita sua conta de luz e água?* ou *Porque o parafuso é sextavado?* entre outras.

A fatoração de um trinômio do segundo grau pode ser “visualizada” com o material concreto e o quebra-cabeças da atividade *Fatorando fisicamente*.

No atividade **...** *probleminhas* há problemas interessantes e instigantes, que permitem ao professor apresentar aos alunos desafios que motivam o estudo de diversos conceitos matemáticos.

É importante que o professor tenha consciência de que o aprendizado da Matemática no ensino fundamental não pode ser alcançado apenas com atividades lúdicas e agradáveis, mas acreditamos que permear as aulas usuais com aulas diferentes e motivadoras pode ser um diferencial no despertar dos alunos para a beleza da Matemática e para a sua utilização prática, cada vez mais indispensável no nosso mundo atual.

ÍNDICE

A Matemática e o caipira

Luiz Márcio Imenes

José Jakubovic

Esta é uma divertida história de um advogado que compra um sítio e tem problemas com o fornecimento de água. A negociação da água de uma nascente na propriedade de seu vizinho caipira envolve um interessante diálogo sobre como a área de um círculo varia com seu raio: uma maneira interessante e atraente de estudar áreas, além de informar sobre o atrito da água nas paredes de um cano.

Esta história tem dois personagens: o caipira e o advogado e ela me foi contada por um amigo do advogado. Passou-se há sete ou oito anos nas proximidades de São Paulo.

Vai lá um dia em que nosso amigo advogado resolve comprar um sitio, de poucos alqueires, com a intenção de construir uma casa e nela passar seus fins de semana. Como não há nascente no sitio, resolve mandar cavar um poço, quando fica sabendo que seu vizinho, um caipira que ali mora há muito tempo, tem em sua propriedade uma nascente com água boa e farta. Procura o vizinho e faz a proposta:

— Eu instalo um cano de uma polegada de diâmetro na sua nascente, conduzo a água para o meu sítio e lhe pago x reais por mês.

A proposta é aceita na hora.

Passa-se o tempo e o advogado resolve implantar no sítio uma criação racional de porcos e, para isso, vai precisar de mais água. Volta a procurar o caipira e lhe propõe trocar o cano de uma polegada por um outro de duas polegadas de diâmetro e pagar $2x$ reais por mês a ele.

O caipira escuta a proposta, não dá resposta imediata, pensa, e passados alguns minutos responde que *não* aceita a proposta.

— Mas, como? – pergunta o advogado. Tem água sobrando, por que não me vende mais e assim também ganha mais?

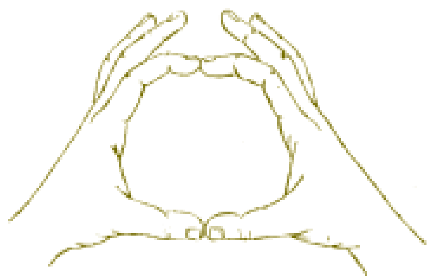
— É que num tá certo, retruca o caipira, e explica com um gesto.

A água que você me paga

passa por aqui:

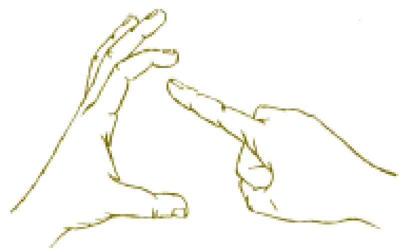
e vosmecê qué me pagá o dobro.

Acontece que o cano que ocê vai ponhá é assim:

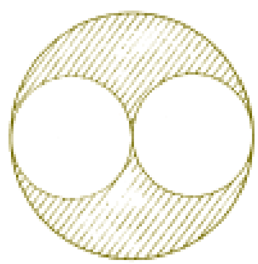


Pois é, quem me paga a água que passa por aqui?

E a que passa por aqui?



Com a nossa linguagem a questão fica assim: um círculo de diâmetro 1 cabe 2 vezes num circulo de diâmetro 2 e ainda fica sobrando espaço:



Ou ainda: se o diâmetro de um circulo dobra, sua área não dobra. Ela "mais que dobra".

O que o caipira não tinha condições de perceber era que o pagamento correto seria $4x$ (quando duas figuras são semelhantes a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus comprimentos correspondentes). Mas para perceber que $2x$ é pouco, basta visualizar um cano dentro do outro.

Novamente a Matemática e o caipira. Agora com o professor e o engenheiro

No texto anterior contamos a historinha do advogado e do caipira, em que este último, usando intuição e bom senso, não aceita o novo pagamento proposto pelo advogado, em conseqüência da substituição de um cano de 1 polegada por outro de 2 polegadas de diâmetro.

Na ocasião, afirmamos que seria correto o advogado pagar 4 vezes mais ao caipira, porque receberia uma quantidade de água 4 vezes maior.

Após ler o referido artigo, o professor Lindolpho de Carvalho Dias chamou nossa atenção para o seguinte: a área da seção de um tubo com 2 polegadas de diâmetro é, de fato, igual a 4 vezes a área da seção de um tubo com 1 polegada de diâmetro. Mas o volume de água escoado pelo tubo não depende apenas da área; deve-se considerar também o atrito da água nas paredes do cano. Esse atrito depende da área lateral do cano. Considerando fixo o comprimento do cano, o atrito será função apenas do perímetro da seção transversal, que é um círculo.

No caso do cano de 1 polegada de diâmetro, o perímetro da seção é igual a $\pi \times 1 = \pi$ polegadas e no caso do cano de 2 polegadas o perímetro é $\pi \times 2 = 2\pi$ polegadas. Em quatro tubos de 1 polegada a soma dos perímetros é 4π polegadas. Portanto em um cano de 2 polegadas o atrito é menor do que em quatro canos de 1 polegada.

O advogado paga x reais pela água que passa pelo cano de 1 polegada. Se colocasse 4 canos de 1 polegada pagaria $4x$. Colocando um só cano de 2 polegadas deverá pagar mais que $4x$ pois, como vimos, o atrito neste caso é menor do que em quatro tubos de 1 polegada. Para determinar o valor correto, o assunto exige conhecimentos de especialistas. Foi assim que procuramos o professor Dr. Carlito Pimenta, da Escola Politécnica da USP, que é engenheiro hidráulico. Ele nos resolveu o problema, mas a resolução é de difícil compreensão para nós que não somos especialistas da área, quanto mais para o caipira e o advogado. Vale a pena contar que muita Matemática elementar entrou em cena: funções (de mais de uma variável), gráficos, logaritmos, um pouco de Geometria, potências (de expoente cinco), raízes quadradas etc.

Chega-se, por fim, à conclusão de que a vazão em um cano de 2 polegadas é, aproximadamente, 6,4 vezes maior que em um cano de 1 polegada (como é grande a influência do atrito neste processo!).

Nem o advogado, nem o caipira (e nem nós, autores deste artigo) imaginávamos que o cálculo correto do valor a ser pago necessitasse de tanta Matemática!

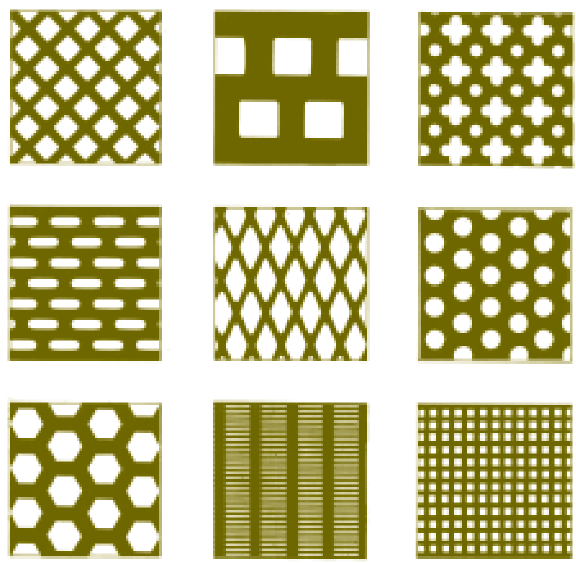
A Geometria das chapas perfuradas

Luiz Márcio Imenes

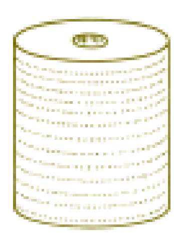
Esta atividade, proposta pelo prof. Luiz Márcio Imenes, utiliza material existente no cotidiano do aluno, chapas perfuradas (cercas, portões, forros, divisórias etc.) para estudar vários tópicos de geometria como áreas e medidas. Além disso, trabalha proporção para decidir qual é a porcentagem de área perfurada nas chapas de diferentes formatos.

A porcentagem de área perfurada

Ao escrever este artigo tenho em mãos o catálogo de uma indústria que produz chapas metálicas perfuradas de vários tipos. Veja os desenhos de alguns pedaços dessas chapas:



Essas chapas têm usos variados em diversos tipos de indústrias. Por exemplo, são empregadas na fabricação de filtros. Você já deve ter visto um filtro de ar do motor de um automóvel ou caminhão. Alguns deles são deste tipo:

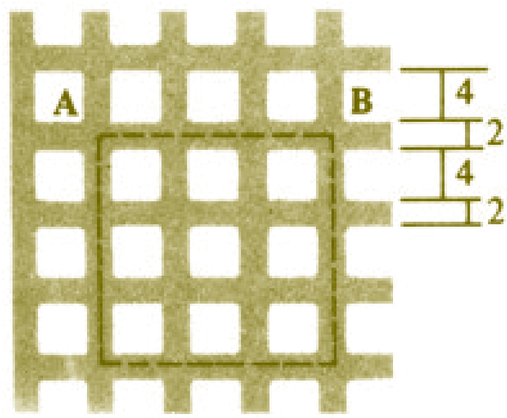


Filtro de ar

Eles têm formato cilíndrico, e sua superfície lateral é feita com uma chapa metálica cheia de furinhos, por onde passa o ar a ser filtrado.

Estas chapas também são usadas como peneiras nas indústrias que produzem minérios, carvão, papel, cimento, etc.

Dependendo do material a ser peneirado, os técnicos que trabalham com isto optam por um ou outro tipo de furo. Decidem ainda qual o tamanho do furo e o espaçamento entre eles. Observando os desenhos das chapas, você percebe que, em alguns casos, a parte furada da chapa é maior que em outros. A relação entre a área da superfície furada e a área da superfície total da chapa, expressa em porcentagem, é chamada, por aqueles técnicos, de *porcentagem de área perfurada*. Vejamos um exemplo. Na chapa seguinte os furos quadrados têm lado 4mm e o espaçamento entre um quadrado e outro é de 2mm.



Para calcular a porcentagem de área perfurada desta chapa, vamos concentrar a nossa atenção num pedaço dela, como por exemplo, o quadrado *ABCD*, cujo lado mede 18 mm (confira). Sua área é 324 mm^2.

No interior do quadrado *ABCD* temos 9 furos quadrados, logo a área da superfície furada é: 9×4^2 $mm^2 = 144$ mm^2.

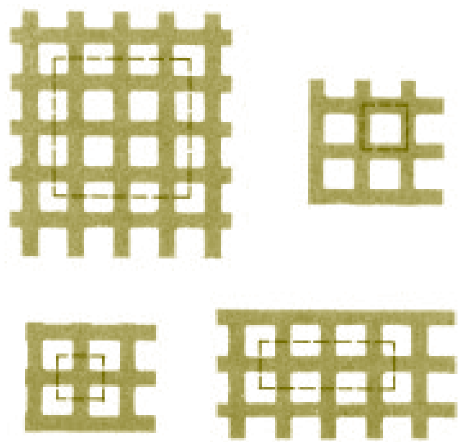
Portanto a porcentagem de área perfurada desta chapa é:

$$p = \frac{144}{324} \cong 0{,}44 = \frac{44}{100} = 44\%$$

Este resultado significa que, de cada 100 cm^2 de chapa, temos 44 cm^2 de furos. Esta porcentagem p de área perfurada é um indicador de quão furada a chapa é.

Pedaços representativos da chapa

Para calcular *p* elegemos um pedaço da chapa: o quadrado *ABCD*. Perceba que não era necessário usar aquele quadrado. Podemos raciocinar sobre qualquer pedaço que seja representativo da chapa como um todo, como por exemplo:



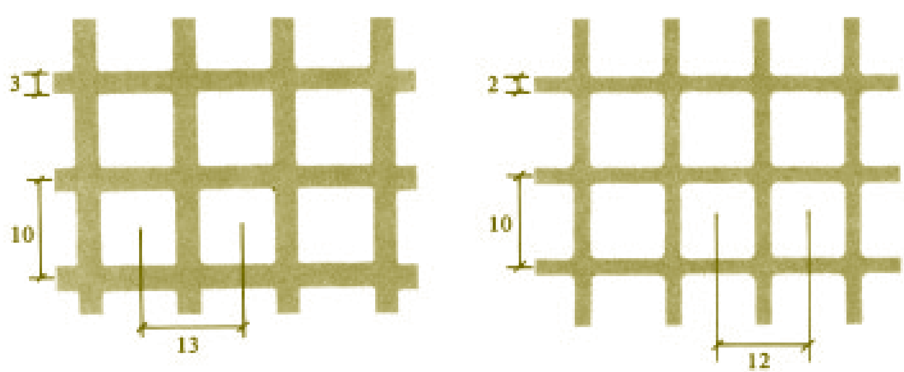
Exercícios

1. Calcule *p* escolhendo como pedaço representativo da chapa um daqueles apresentados no texto.

2. Tente conceituar melhor o que é um pedaço representativo da chapa. Pense em transformações (simetrias, translações).

A distância entre os centros dos furos

Observe as duas chapas seguintes. Em ambas, os furos quadrados têm lado de 10 mm. Na primeira o espaçamento entre os quadrados é de 3 mm e na segunda é de 2 mm. Uma forma cômoda de caracterizar este maior ou menor afastamento entre os furos é através da distância entre seus centros.



No primeiro caso esta distância é de 13 mm, e no segundo, de 12mm.

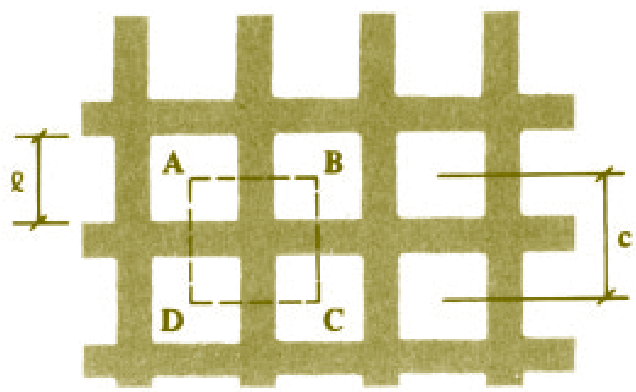
Esta é a linguagem usada pelos técnicos que trabalham nesta área: a chapa fica definida por sua espessura, pelo tipo de furo (quadrado, circular, retangular etc.), pela disposição dos furos, pelo tamanho dos furos, pela distância entre seus centros, e pelo material de que é feita a chapa (ferro, cobre, alumínio etc.).

A necessidade de resultados gerais

Às pessoas que trabalham neste ramo interessa a existência de resultados gerais que permitam o cálculo da porcentagem p com rapidez. Por esta razão, o catálogo a que me referi está repleto de fórmulas e tabelas. Cada uma destas fórmulas se refere a um tipo de furo: quadrado, retangular, circular, etc. Vejamos algumas delas e a sua justificativa. É evidente que no catálogo não consta esta justificativa. Seus objetivos são outros.

A chapa de furos quadrados

Vamos indicar com l o lado do furo quadrado e com c a distância entre os centros dos furos. Vamos raciocinar sobre o quadrado *ABCD:* seu lado é c, sua área é c^2. A área perfurada corresponde aos quatro quadradinhos de lado $l/2$, que juntos formam um quadrado de lado l. Logo a área perfurada é l^2.

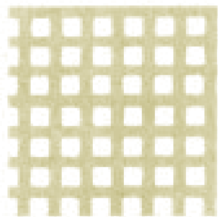


Portanto a porcentagem p de área perfurada é:

$$p = \frac{l^2}{c^2} \quad \text{ou} \quad p = \left(\frac{l}{c}\right)^2$$

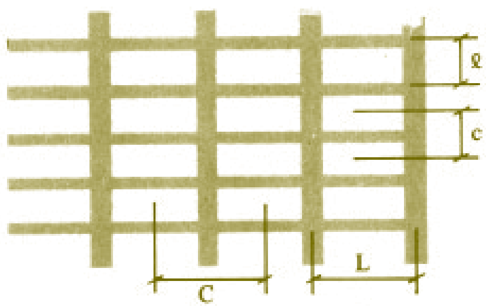
Exercício

3. Calcule p para a chapa seguinte na qual $l = 2{,}5$ mm e $c = 4$ mm.



A chapa de furos retangulares

Na chapa de furos retangulares vamos indicar por l e L os lados do retângulo. Seja c a distância vertical entre centros, e C a distância horizontal entre eles.



O restante deixo de presente para você: prove que a porcentagem p de área perfurada é dada por

$$p = \frac{l \times L}{c \times C}$$

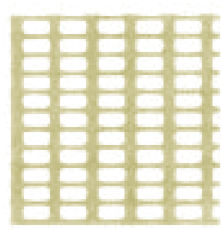
Exercícios

4. Calcule a porcentagem de área perfurada da chapa seguinte, onde:

   $l = 1{,}6$ mm,

   $L = 3{,}6$ mm,

   $c = 2{,}4$ mm, e $C = 5$ mm.



5. Mostre que a fórmula $p = \left(\frac{l}{c}\right)^2$,

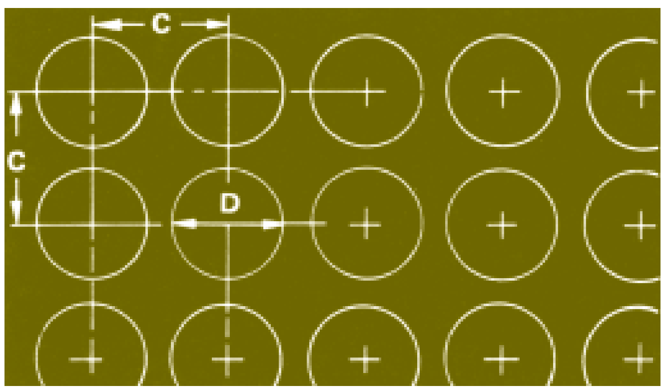
referente às chapas de furos quadrados, é caso particular da fórmula

$$p = \frac{l \times L}{c \times C}$$

referente às chapas de furos retangulares.

A chapa de furos circulares em disposição reta

Na chapa da figura, seja d o diâmetro dos furos circulares e c a distância entre seus centros.



Raciocinemos no quadrado $ABCD$. Seu lado é c, logo sua área é c^2. A parte furada corresponde aos quatro quartos de círculo de diâmetro d, logo a área da parte perfurada é

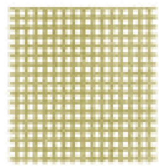
$$\frac{\pi d^2}{4}.$$

Portanto:

$$p = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{c^2} \text{ ou } p = \frac{\pi}{4} \times \left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

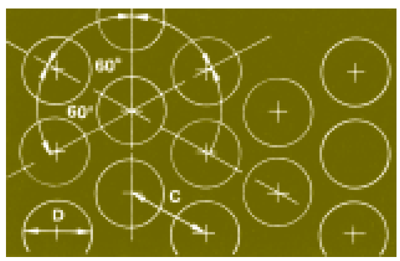
Exercício

6. Calcule p para a chapa seguinte, onde $d = 1$ mm e $c = 1{,}6$ mm.



A chapa de furos circulares em disposição hexagonal

Nesta disposição os centros dos seis furos que circundam um furo qualquer são vértices de um hexágono regular. Perceba que este hexágono é um pedaço representativo da chapa toda.



O lado do hexágono destacado na figura é c. Pensando o hexágono como justaposição de seis triângulos eqüiláteros de lado c, sua área é:

$$6 \times \frac{c^2\sqrt{3}}{4}.$$

A parte furada, interior a este hexágono, é constituída de um círculo no centro e mais seis terços de círculo, portanto, ao todo são três círculos de diâmetro d. Logo a área perfurada é

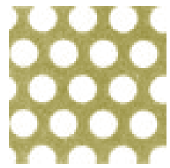
$$3 \times \frac{\pi d^2}{4}.$$

Portanto:

$$p = \frac{\frac{3\pi d^2}{4}}{\frac{6c^2\sqrt{3}}{4}} \quad \text{ou} \quad p = \frac{\pi\sqrt{3}}{6}\left(\frac{d}{c}\right)^2.$$

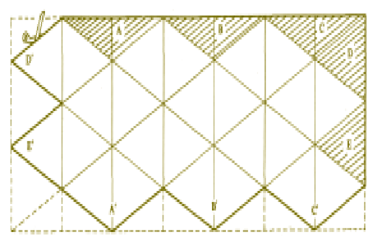
Exercício

7. Calcule p para a chapa seguinte, onde $d = 4$ mm e $c = 6$ mm.



A chapa de furos oblongos

A forma oblonga dos furos, a que se refere o catálogo, é a reunião de um retângulo com dois semi-círculos. O significado de l, L, c e C está indicado na figura:



Agora prove que: $$p = \frac{4Ll + (n-4)l^2}{4Cc}$$

Novos problemas

E agora você pode inventar problemas, pensando em furos em forma de losango, hexágono regular, triângulos eqüiláteros, elipses etc.

Além de jogar com a forma dos furos, você pode variar ainda a sua disposição, como fizemos com os furos circulares.

Vamos lá, aceite o desafio!

Encerramento

Para encerrar, duas palavrinhas.

Os conceitos envolvidos nestes problemas são acessíveis a alunos de 8ª série do ensino fundamental: cálculo de áreas e porcentagens. Convido os colegas que atuam neste nível de ensino a levá-los para suas aulas de Geometria quando estiverem calculando áreas. Aposto que algum aluno aparecerá em sala com um pedaço destas chapas, e que a aula de Matemática dará mais prazer a todos.

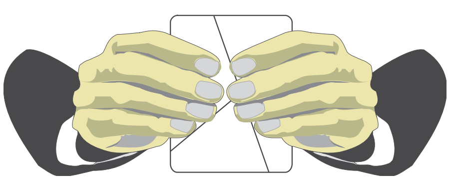
Agora a segunda palavrinha. O catálogo industrial, no qual aprendi estas coisas que estão neste artigo, me foi presenteado por meu tio Eugênio, que durante longos anos de sua vida trabalhou em indústrias metalúrgicas. Sempre fazendo de tudo nelas, mas sempre usando Matemática na sua profissão. Ao se aposentar entregou-me seus livros, revistas, catálogos e apontamentos, dos quais se pode retirar muito material para artigos deste tipo, mostrando como a Matemática é importante na vida das pessoas. Ao tio Eugênio, meu muito obrigado.

Origami e geometria

José de Oliveira Siqueira

As dobraduras permitem um trabalho lúdico com bonitos resultados visuais e são aqui utilizadas para comprovar resultados de Geometria Plana e para construções geométricas.

É possível trabalhar perímetros, semelhança de triângulos e proporcionalidade.



Introdução

Todos nós, sem dúvida, já fizemos um barco, um chapéu ou um avião de papel. Esta arte tem um nome: *origami*. Origami é uma palavra de origem japonesa, que significa "dobrar papel". Desde 1876 esta arte faz parte do currículo escolar japonês, e no Brasil, aos poucos, ela vai se introduzindo no ensino.

O origami pode servir como um simples passatempo nos momentos de lazer; pode ainda ser utilizado como um recurso didático que colabora para o desenvolvimento da criatividade e da habilidade manual de crianças.

Para nós, professores de Matemática, o origami oferece um farto material para descobertas teóricas. É evidente que a teoria surge da observação de fatos e da colocação de problemas. Um dos problemas práticos do origami é dobrar um quadrado em um número ímpar de retângulos congruentes. Você já tentou dobrar um quadrado de papel em 3 retângulos exatamente iguais? Parece fácil. Mas não é. Este artigo tem como objetivo resolver este problema particular e também generalizar o resultado para que se possa dobrar um quadrado em um número qualquer de retângulos congruentes.

Problema 1

Dividir um quadrado de papel em 3 retângulos congruentes, usando dobras de papel.

Solução: Pegue uma folha quadrada e siga as instruções:

(a) dobre o papel, fazendo A coincidir com D, e B coincidir com C. Desta forma ficam determinados E e F, pontos médios de AD e BC;

(b) abra o papel, e agora faça D coincidir com F. Assim construímos um triângulo retângulo com um cateto CF, e a soma do outro cateto com a hipotenusa igual ao comprimento do lado do quadrado;

(c) chame de G o ponto de AB, que coincide com um ponto de AD na nova posição.

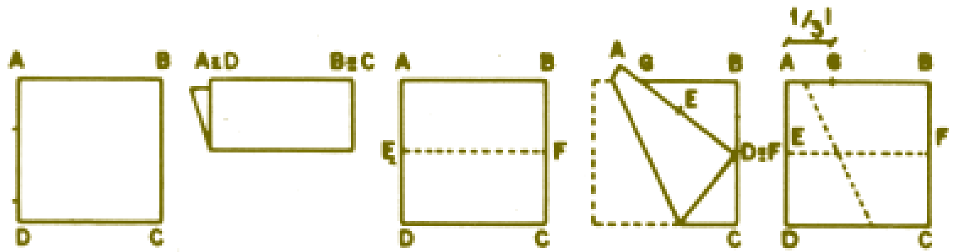


Figura 1: $AG = \frac{1}{3}\, l$

Fazendo o mesmo para o segmento DC, podemos obter o ponto H:

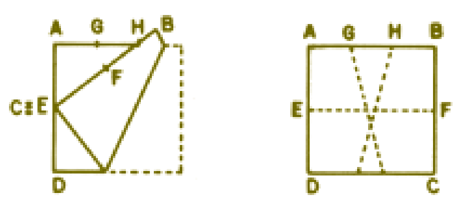
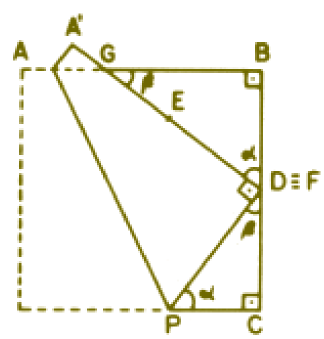


Figura 2: $HB = \frac{1}{3}\, l$

Os pontos G *e* H assim obtidos dividem o lado AB em três segmentos congruentes.



Vamos demonstrar esta afirmação, que é conhecida como *teorema de Haga.*

Demonstração:

Os triângulos DGB e PDC são semelhantes. Portanto,

$$\frac{BD}{PC} = \frac{GB}{DC}.$$

Como

$$DC = BD = \frac{l}{2},$$

então

$$GB \times PC = \frac{l^2}{4}.$$

No ΔPDC, por Pitágoras, temos $(PD)^2 = (PC)^2 + (DC)^2$. Como $PC + PD = l$,

$$(PC)^2 = (l - PC)^2 - \frac{l^2}{4}.$$

Portanto, temos $PC = \frac{3l}{8}$, $GB = \frac{2l}{3}$ e $AG = \frac{l}{3}$.

Problema 2

Dividir um quadrado de papel em 5 retângulos congruentes usando dobras de papel.

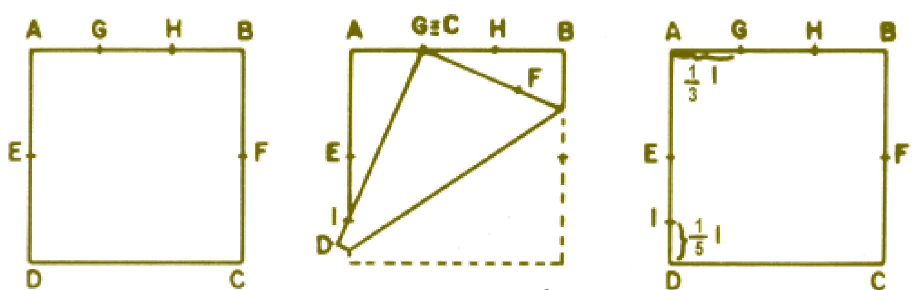


Figura 3 : $ID = \frac{l}{5}$

Deixamos a prova deste resultado por conta do leitor.

Problema 3

Dividir um quadrado de papel em 7 retângulos congruentes, usando dobras de papel.

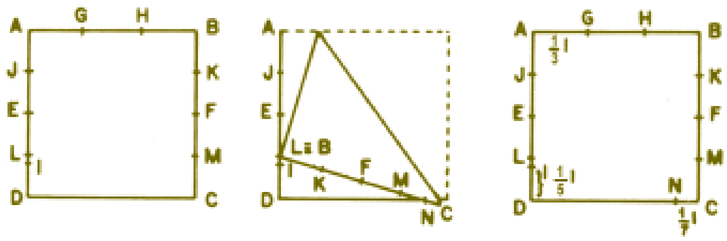


Figura 4: $NC = \dfrac{l}{7}$

J, K, L, M são pontos médios, respectivamente, de *AE, BF, ED, FC*.

Pedimos ao leitor, novamente, que demonstre este resultado.

Informamos aos leitores interessados que é possível demonstrar um resultado geral que engloba todos os casos considerados: Sejam *ABCD* um quadrado e *E* 0 *AB* tal que

$$AE = \frac{m}{m+n} l \quad \text{e} \quad EB = \frac{n}{m+n} l,$$

com *m* e *n* naturais não nulos. Se dobrarmos o quadrado de modo que os pontos *E* e *C* coincidam, então,

$$FD = \frac{m}{2m+n} l,$$

sendo *F* o ponto de encontro de *AD* e *ED',* onde *D'* indica nova posição de *D*.

$3\pi r$, $2\pi r$ ou $4\pi r$?

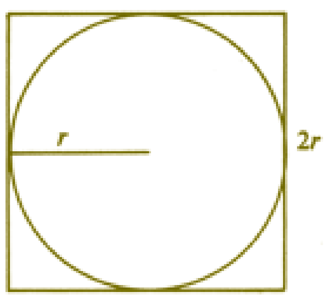
Luiz Márcio Imenes

Um problema prático da compra de uma mesa, nesta atividade, suscita a pergunta: Quantas pessoas cabem numa mesa redonda? Para respondê-la, trabalha-se tópicos de geometria, como a área de um quadrado inscrito numa circunferência, comprimentos de arcos, etc

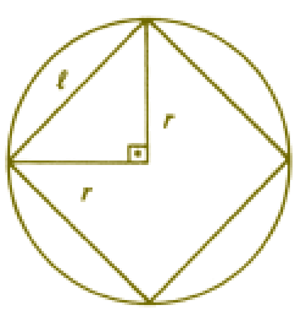
Fernando foi meu aluno em 1973. Encontramo-nos outro dia, no casamento de um amigo comum. Falávamos da vida, quando ele me contou esta história.

Na época em que montava seu apartamento, ele decidiu comprar uma mesa de tampo redondo. A que havia na loja era muito grande, mas o vendedor lhe informou que no depósito havia outra com 1,10 m de diâmetro. Com receio de que esta, por sua vez, fosse pequena demais, ele pensou em fazer alguns cálculos. Será que na volta desta mesa caberiam, pelo menos, umas 6 pessoas?

Lembrou-se que na fórmula a ser usada aparecia o número π multiplicado pelo raio do círculo, mas não sabia se era $3\pi r$, $2\pi r$ ou $4\pi r$. Foi então que lhe ocorreu uma idéia. O quadrado circunscrito ao círculo de raio r tem lado $2r$ e perímetro $8r$. No caso do círculo de 1,10 m de diâmetro este perímetro é igual a 4,40 m.



O lado do quadrado inscrito no círculo ele calculou com o teorema de Pitágoras (que não havia esquecido):



$$l^2 = r^2 + r^2$$

ou

$$l = r\sqrt{2}.$$

Portanto, o perímetro do quadrado inscrito é igual a

$$4r\sqrt{2} = 2{,}20\sqrt{2} \cong 3{,}11 \text{ m.}$$

A seguir, ele calculou a média aritmética destes dois perímetros:

$$\frac{4{,}40 + 3{,}11}{2} \cong 3{,}75 \text{ m.}$$

Deste modo, obteve o perímetro aproximado (3,75 m) da mesa circular de diâmetro 1,10 m. Estimando cerca de 60 cm para cada pessoa, ele concluiu que caberiam 6 pessoas à volta da mesa.

Fernando sabia que a média aritmética dos perímetros dos quadrados poderia não ser igual ao perímetro do círculo. Mas, para o que desejava, esta era uma aproximação razoável.

Apenas como curiosidade, vejamos qual é o erro relativo desta aproximação.

Temos:

p = perímetro do círculo = $2\pi r$

m = média aritmética dos perímetros dos quadrados =

$$\frac{8r + 4\sqrt{2}}{2} = 4r + 2r\sqrt{2}$$

$$\text{erro relativo} = \frac{(4r + 2r\sqrt{2}) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{2 + \sqrt{2} - \pi}{\pi} \cong 0{,}09 = 9\%.$$

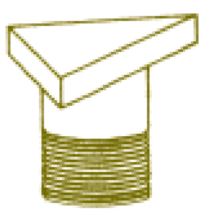
Sem dúvida, o bom senso de Fernando funcionou bem!

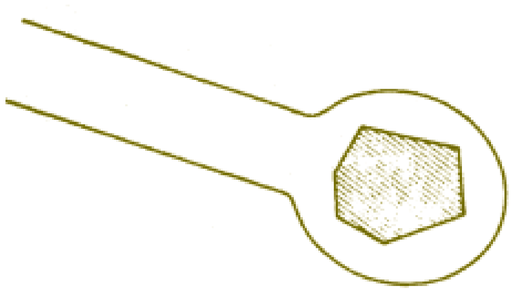
Por que o parafuso é sextavado?

Luiz Márcio Imenes

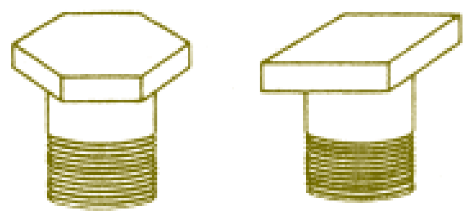
José Jakubovic

> Nesta atividade os autores usam parafusos e chaves de fenda, presentes na realidade dos alunos, para estudar ângulos internos de polígonos.
>
> É discutida a forma da cabeça de um parafuso que permite melhor funcionalidade sob diferentes aspectos. Pode-se pedir aos alunos que tragam parafusos encontrados em casa para concretizar e enriquecer a atividade.





Você já deve ter visto parafusos destes tipos:



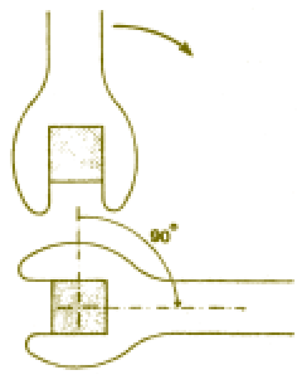
O mais comum é o primeiro, chamado pelos mecânicos de sextavado. Repare que sua cabeça (onde se encaixa a chave para apertá-lo ou desapertá-lo) é um poliedro: trata-se de um prisma regular hexagonal.

Certa vez vimos um parafuso especial de uma máquina, cuja cabeça era um prisma regular triangular:

Por que não existem (pelo menos nunca vimos) parafusos pentagonais ou octogonais?

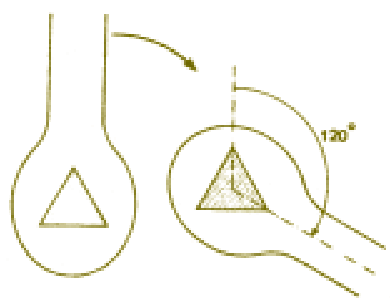
Em todos estes tipos de parafusos o polígono presente é sempre regular, e é fácil perceber a razão disto. Seria inconveniente apertar e desapertar um parafuso em cuja cabeça figurasse um polígono não regular. A chave precisaria ser especial para aquele parafuso e ela voltaria a se encaixar na cabeça do mesmo, somente após uma rotação de 360°.

Se o polígono da cabeça do parafuso é um quadrado, após uma rotação de 90°, o parafuso volta à posição original, podendo-se encaixar outra vez a chave para um novo giro.

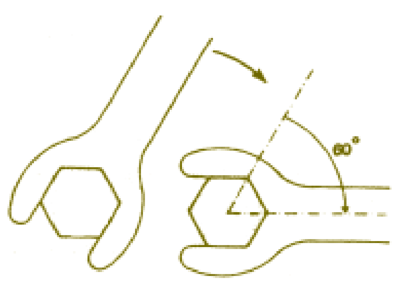


Deste modo, com quatro giros de 90°, a rosca dá um passo.

No caso do parafuso triangular são necessários três giros de 120° para completar uma volta na rosca.

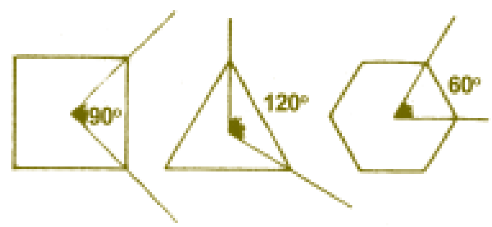


Com o parafuso sextavado completamos um passo da rosca após seis giros de 60° cada um.



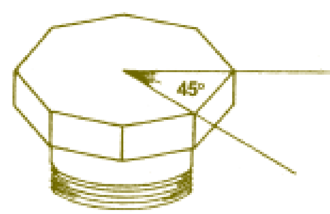
Quando um mecânico está concertando um defeito qualquer numa máquina – por exemplo, um automóvel – muitas vezes ele tem pouco espaço para trabalhar (em geral em posições desconfortáveis). Por esta razão, dos três parafusos apresentados, o mais cômodo é o hexagonal, pois é o que pode ser apertado ou desapertado com giros menores (60°), isto é, com movimentos mais curtos do braço.

Observe que este ângulo de giro a que estamos nos referindo é o ângulo central do polígono regular.



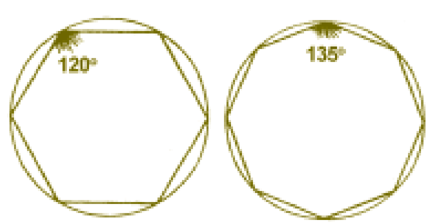
A medida do ângulo central do polígono regular de n lados é: $\frac{360^\circ}{2}$

e, se é conveniente que o ângulo central do polígono seja "pequeno" nos parafusos, por que não usar polígonos com maior número de lados? Um octógono, por exemplo? Neste caso, o ângulo de giro seria de apenas 45°.



Sem dúvida, sob este aspecto, o octógono é mais conveniente que o hexágono. Entretanto há outros fatores que pesam no projeto de um parafuso.

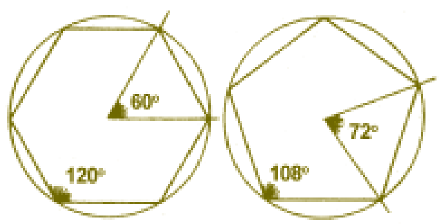
Um octógono regular está mais próximo do círculo que o hexágono regular



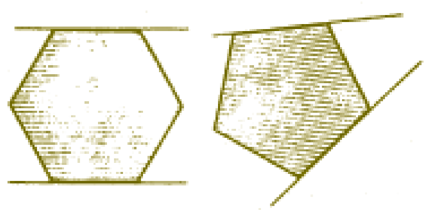
O ângulo interno do hexágono regular mede 120°, e o do octógono regular, 135°. A chave usada para apertar ou desapertar um parafuso nunca se ajusta perfeitamente à sua cabeça. Sempre existe uma folguinha. Com o uso, a tendência da cabeça é sofrer um arredondamento (dizemos que a cabeça do parafuso fica espanada). Sob este aspecto o polígono mais adequado é o triângulo (é o que mais se afasta do círculo, é o que tem o menor ângulo interno: 60°).

Perceba que, numa linguagem pouco precisa, mas muito significativa, o hexágono fica mais ou menos no meio termo quando consideramos estes dois fatores: giro pequeno e dificuldade para o espaçamento.

Mas por que não um parafuso pentagonal? O pentágono é próximo do hexágono. Sob aqueles dois aspectos apresentados, o pentágono possui propriedades próximas das do hexágono.

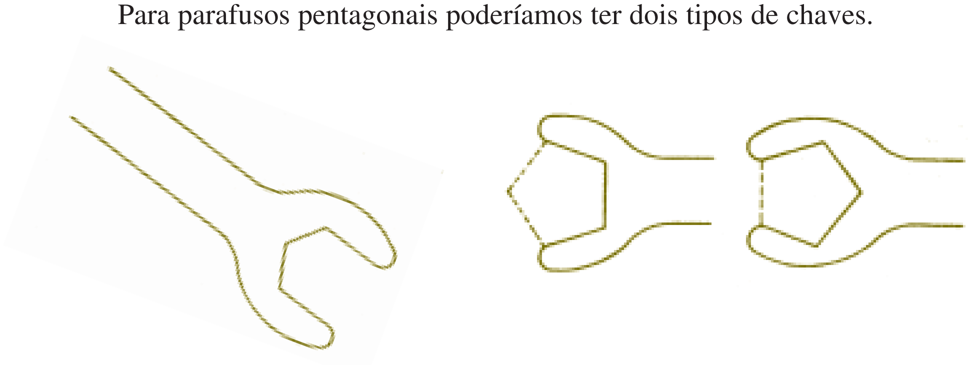


Para compreender porque não existem parafusos pentagonais, é preciso considerar outro aspecto. No hexágono regular existem lados opostos paralelos, e o mesmo não ocorre no pentágono regular.

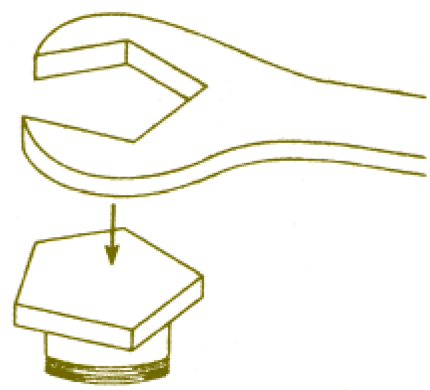


Isto significa que a chave usada para o parafuso hexagonal tem, no encaixe, bordos paralelos, o que facilita o ajuste da chave à cabeça do parafuso.

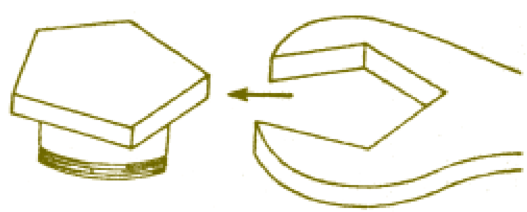
Para parafusos pentagonais poderíamos ter dois tipos de chaves.



A primeira tem a desvantagem de "escapar" com facilidade e a segunda só se encaixaria na cabeça do parafuso com este movimento:



e não com este:



o que é incômodo para o mecânico. A primeira das chaves pentagonais não apresenta esta desvantagem, mas como dissemos, "escapa" com mais facilidade da cabeça do parafuso.

Em resumo, no projeto de parafusos com cabeças prismáticas, o polígono regular da base deve ser escolhido levando-se em conta:

1. seu ângulo central (giro pequeno);

2. seu ângulo interno (espanamento da cabeça);

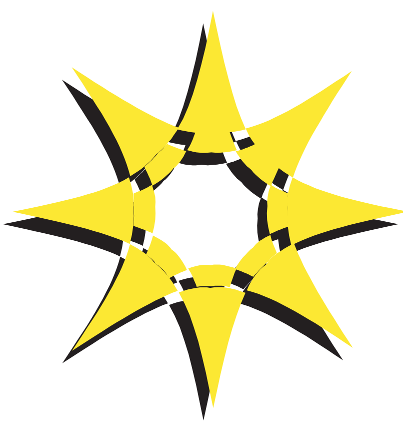
3. existência de lados paralelos (encaixe da chave).

Estes critérios fazem do hexágono regular (parafuso sextavado) o polígono mais adequado.

Um problema: resolução & exploração

Lilian Nasser

Geometria mais prontidão e criatividade para resolver problemas são exploradas nesta atividade que discute o uso de um pedaço retangular de vidro para obter pedaços triangulares, evitando bolhas que há no vidro.



Introdução

Muito se tem propagado nos últimos anos sobre a Resolução de Problemas como um método ideal para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O que vemos em nossas salas de aula e nos livros-texto, no entanto, são listas intermináveis de problemas, quase sempre do mesmo tipo e que podem ser resolvidos "conforme o modelo". É claro que isto não propicia o desenvolvimento do raciocínio das crianças e, ao invés de motivá-las, cria nelas, atitudes negativas em relação à Matemática.

Na tentativa de reverter esta situação, o professor pode desenvolver o processo ensino-aprendizagem sob a forma de desafios e, em aulas especiais, propor problemas interessantes, que possam ser "explorados", e não apenas resolvidos.

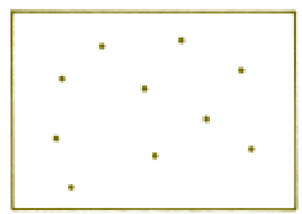
"Explorar" um problema significa procurar soluções alternativas, além da natural, e analisá-lo sob diferentes pontos de vista matemáticos. Assim, um mesmo problema pode ter uma resolução aritmética e outra algébrica ou geométrica, ou pode ser resolvido por uma estratégia (heurística), sem o uso de algoritmos ou de conhecimentos matemáticos específicos. É evidente que isso nem sempre será possível com qualquer problema e, nas primeiras séries, a "exploração" deve ser conduzida pelo professor com cuidado especial. Problemas ideais para serem "explorados" são os chamados "problemas de processo", ou seja, aqueles que não podem ser resolvidos apenas pelo uso de uma ou mais operações, mas requerem o uso de uma estratégia adequada.

Além disso, depois que o aluno "compreende" realmente o problema e sua(s) resolução(ões), deve ser incentivado a explorar extensões e variações do mesmo problema, sugeridas no início pelo professor e, depois, pela própria turma.

Um exemplo

Para ilustrar essa tese, vejamos como pode ser "explorado" o seguinte problema:

Para construir uma janela ornamental, um operário precisa de pedaços triangulares de vidro. Ele pretende aproveitar um vidro retangular defeituoso, com 10 *bolhas de ar, sendo que não há* 3 *bolhas alinhadas entre si, nem duas delas com algum vértice do retângulo, ou uma delas com* 2 *vértices do retângulo.*



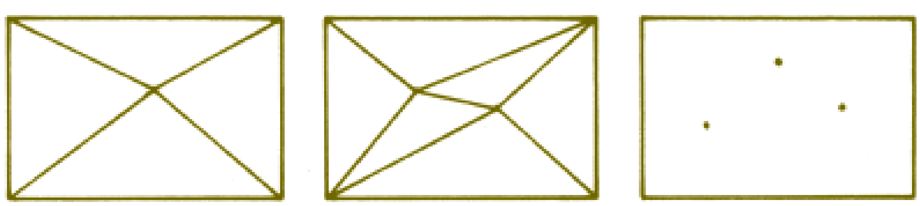
Para evitar bolhas de ar no seu projeto final, ele decidiu cortar os pedaços triangulares com os vértices coincidindo ou com uma bolha de ar, ou com um dos cantos do vidro original. Quantos pedaços triangulares ele cortou?

Inicialmente, o aluno deve entender como será cortado o vidro. É claro que isso não é imediato com 10 bolhas! A estratégia a ser usada, então, pode ser:

Resolver um problema mais simples

Tentando fazer os cortes nos casos de 1 bolha, 2 bolhas, 3 bolhas,..., o aluno é levado a perceber que o número de triângulos depende do número de bolhas.

Observa-se que, para o mesmo número de bolhas, há mais de uma configuração possível. Se o número de triângulos depende apenas do número de bolhas, é preciso procurar algumas propriedades para cada caso.



1 Bolha $\Rightarrow$ 4 triângulos 2 bolhas $\Rightarrow$ 6 triângulos 3 bolhas $\Rightarrow$? triângulos

Por exemplo, com 2 bolhas, temos:

- ∆ cada bolha é vértice de 4 triângulos. Será que em todas as configurações isso acontece? Tente outras configurações para verificar.
- ∆ cada bolha é vértice de, no mínimo, quantos triângulos? E no máximo?
- ∆ cada canto do vidro original é vértice de quantos triângulos?

Tente relacionar algumas perguntas semelhantes para o caso de 3 bolhas. Depois disso, a estratégia pode continuar da forma seguinte:

Procurar uma lei de formação e generalizar

Dependendo do nível dos alunos, eles percebem que uma bolha adicional gera a transformação de um triângulo em 3 novos triângulos, isto é, são criados mais dois triângulos.

A partir disso, a lei de formação pode ser encontrada através da

Construção de uma tabela:

Número de bolhas	Número de triângulos
1	4
2	6
3	8
4	10
.	.
.	.
.	.
n	$2n + 2$
10	22

Concluímos, então, que a lei de formação é $2n + 2$, e a resposta do problema é: 22 pedaços triangulares.

Solução geométrica (a partir da 7ª série)

Como a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, e o número de triângulos independe da maneira como se decompõe o vidro, a soma S das medidas dos ângulos internos de todos os triângulos é 180° vezes o número de triângulos.

Por outro lado,

S = [soma das medidas dos ângulos em torno de cada bolha] + [soma das medidas dos 4 ângulos retos dos vérties do vidro retangular]

$$S = 360^{o} \times 10 + 90^{o} \times 4 = 3960^{o}$$

Logo, o número de triângulos será: 3960/180 = 22.

Forma geral com n bolhas:

$$\frac{360^{\circ} \cdot n + 90^{\circ} \cdot 4}{180^{\circ}} = 2n + 2.$$

Exploremos, agora, algumas extensões do problema:

1) Resolva o mesmo problema com um vidro triangular.

2) Resolva o mesmo problema com um vidro em forma de pentágono.

3) Com n bolhas, considere o vidro original em forma de m-ágono. Você é capaz de obter uma regra geral para o número de triângulos obtidos? (Tente a solução geométrica. A resposta é $2n + m - 2$.)

4) A resposta do problema seria diferente se o vidro original tivesse a forma de um quadrilátero não regular?

5) Que aconteceria se, no lugar de triângulos, quiséssemos cortar o vidro em forma de m-ágonos?

Observação final

Para que o professor possa levar seus alunos a "explorar" os problemas, ele deve ter sempre, e não só durante a atividade de resolução de problemas, atitudes que criem neles espírito crítico e inovador. Exemplos de tais atitudes são:

– dar chance aos alunos de tentar estratégias de solução por si próprios;

– aproveitar as idéias dos alunos, mesmo que não levem à resposta certa (não usar apenas o certo ou errado como parâmetros de correção);

– deixar que eles criem perguntas, visando à compreensão do problema (ao invés de receber respostas prontas para perguntas que não fizeram);

– não mostrar soluções prontas e arrumadas, mas deixar que eles sintam todo o raciocínio desenvolvido até chegar a elas.

A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga

Geraldo Ávila

Qual é o mais distante: o Sol ou a Lua? Quais os tamanhos da Terra, Sol e Lua? A busca das respostas à essas perguntas intrigantes motivam o estudo de ângulo, proporções ou relações no triângulo retângulo.

Além disso, esta atividade privilegia a interdisciplinaridade, discutindo o ciclo lunar, eclipses, movimentos da Lua e da Terra etc. sempre dentro do contexto histórico dos cálculos feitos por Aristarco, Eratóstenes e Ptolomeu.

Os tamanhos do Sol e da Lua e as distâncias desses astros à Terra já eram calculados na antiguidade, séculos antes de Cristo; mas poucas pessoas sabem como eram feitos esses cálculos. Eles se baseiam em idéias que são muito simples e geniais, ao mesmo tempo em que estão intimamente ligadas a noções fundamentais de Geometria – como semelhança de triangulo e proporcionalidade –, servindo, pois, como excelente motivação ao estudo dessa disciplina. Por isto mesmo essas questões devem ser divulgadas, já que elas ainda não aparecem nos livros de ensino fundamental e médio.

Qual o mais distante: o Sol ou a Lua?

Para constatar que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, basta observar atentamente as várias fases da Lua. Se ela estivesse mais longe de nós que o Sol, então, por simples análise de suas várias posições relativamente ao Sol e à Terra (a Figura 1 ilustra quatro dessas posições), concluímos que ela estaria sempre iluminada pelo Sol quando vista da Terra. Em particular, não haveria lua nova! E haveria duas posições da Lua, em 1 e em 3, onde ela seria lua cheia – esta última em pleno meio-dia, o que nunca acontece realmente. A hipótese contrária, de que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, é a única compatível com as várias fases da Lua, em particular com a ocorrência de luas novas. Outro fato a corroborar esta hipótese é a ocorrência de eclipses do Sol, que só são possíveis com a Lua mais próxima da Terra que o Sol.

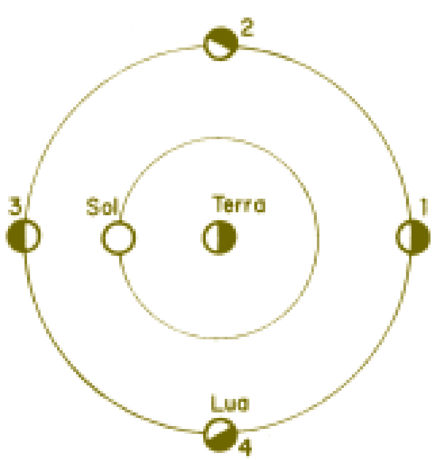
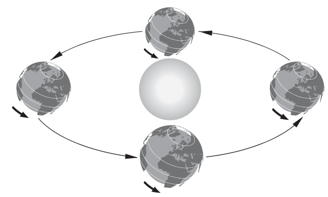


Figura 1

Quão mais distante?



A idéia de Aristarco

Para descobrir quão mais distante que a Lua se encontra o Sol, devemos aprofundar um pouco mais nossa observação do ciclo lunar. O que vamos descrever agora é o método que o sábio grego Aristarco de Samos (séc. III a.C.), da escola de Alexandria, usou para comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

Existem duas posições da Lua em sua órbita, o "quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Figura 2). Quando isso acontece, o triangulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Qualquer pessoa pode fazer uma observação simples e notar que nessa configuração o ângulo $\alpha = \widehat{LTS}$ (Figura 3) é muito próximo de 90º, indício de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a Lua. Esse fato é facilmente notado ao nascer e ao pôr do Sol, evidentemente com a Lua em quarto crescente ou quarto minguante (meia-lua), como ilustra a Figura 3. Aristarco teria medido esse ângulo α, encontrando para ele o valor de 87º. Então, o ângulo $\beta = \widehat{LTS}$ seria de 3º. Basta agora construir um triangulo retângulo com esses ângulos e verificar o valor da razão *TS*/*TL*, que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao Sol é cerca de vinte vezes a distancia da Terra à Lua.

Voltemos a considerar o problema de medir o ângulo α (Figura 2). Na verdade é mais fácil calcular esse ângulo do que medi-lo diretamente. Basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo de passagem de minguante a crescente; com estes dados uma proporção simples resolve o problema. O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante a crescente durava 14,25 dias, um dia menos que a passagem de crescente a minguante. Admitindo uma velocidade uniforme da Lua em sua órbita, os ângulos descritos pelo seu raio vetor são proporcionais aos tempos gastos nos deslocamentos correspondentes. Então, com referencia à Figura 2, podemos escrever

$$\frac{360^\circ}{29{,}5} = \frac{2\alpha}{14{,}25},$$

donde podemos $\alpha = 86{,}57^\mathrm{o}$, portanto,

$$\frac{TS}{TL} = \sec\alpha = \sec 86{,}95^\circ \cong 18{,}8,$$

logo $TS = 18{,}8\ TL$.

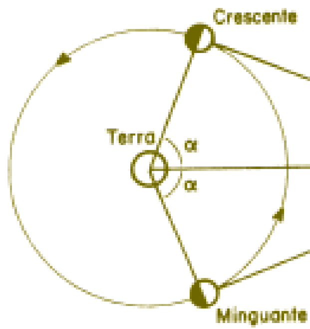


Figura 2

É preciso que se diga que o resultado de Aristarco está muito longe do valor correto, pois sabemos hoje que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distancia da Terra à Lua. Em conseqüência, o ângulo α está próximo a 89,86º, portanto muito perto de 90º! Os raios solares que se dirigem à Terra à Lua são praticamente paralelos. Isto põe o problema de explicar como Aristarco teria chegado ao calculo de α . Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante a crescente se deve à peculiaridade do movimento da Lua naquela época.

Tamanhos do Sol e da Terra

Aristarco observou que o Sol e a Lua têm o mesmo "tamanho angular". Em outras palavras, o ângulo 2α, sob o qual um observador terrestre vê o Sol, é o mesmo sob o qual ele vê a Lua (Figura 4). Esse fato, aliás, é comprovado pela observação de um eclipse total do Sol. Realmente, quando ocorre tal eclipse, o disco lunar coincide com o disco solar, encobrindo-o por inteiro.

Aristarco estimou o ângulo 2α da Figura 4 como sendo 2º; na verdade ele é de cerca de apenas 0,5º. Mas isto, como o leitor deve notar, não prejudica o resultado que obteremos a seguir, baseado na semelhança dos triângulos *TLL'* e *TSS'*. Esta semelhança nos permite escrever

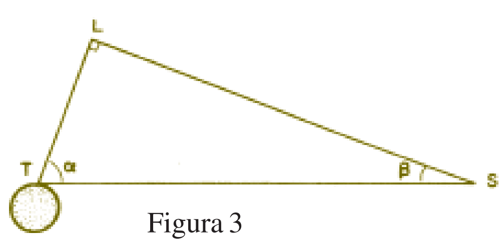


Figura 3

isto é, os raios do Sol e da Lua estão entre si como as distancias *TS* e *TL*, respectivamente. Mas, pelo que vimos anteriormente,

$$\frac{TS}{TL} \cong 20.$$

de sorte que $SS' \cong 20\ LL'$, segundo Aristarco, ou seja, o raio do Sol é aproximadamente vinte vezes o raio da Lua.

Tendo em vista referências futuras, vamos resumir aqui resultados já obtidos. Sejam $D_S = TS$ (Figura 4) a distância da terra ao Sol, $DL = TL$ a distância da Terra à Lua, $R_S = SS'$ o raio do Sol, e $R_L = LL'$ o raio da Lua. Então:

$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = a \cong tg\alpha, \qquad \frac{D_S}{D_L} = b,$$

onde, para Aristarco, $a \cong 1º$ e $b \cong 20$, quando, na realidade, $a \cong 0{,}25º$ e $b \cong 400$.

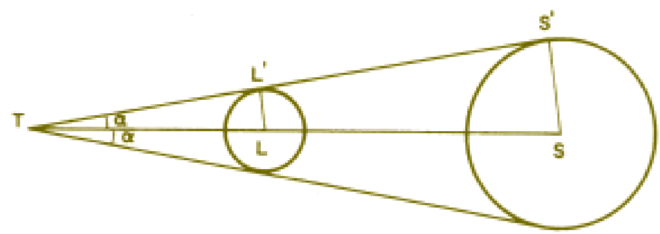


Figura 4.

Relações com o raio da Terra

Para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua a raio da Terra, Aristarco observou o que acontece durante um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da terra (Figura 5). Pelo tempo gasto nessa travessia, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era 8/3 do diâmetro da Lua.

Na Figura 6, *L, T, S* são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios; *LD é* o raio do cone de sombra da altura da Lua, de sorte que $LD = 8R_L/3$. Da semelhança dos triângulos *DFC* e *CEA* resulta:

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$

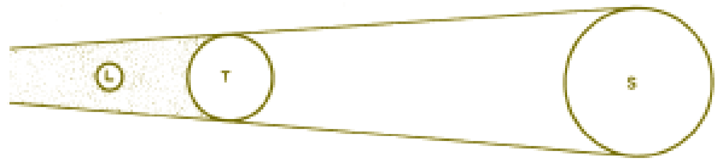


Figura 5

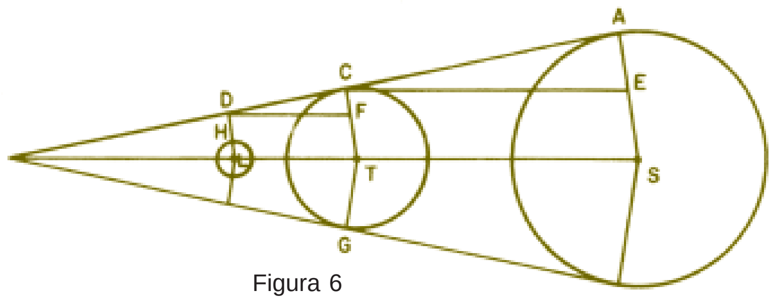


Figura 6

Mas

$$CF = TC - TF = R_T - LD = R_T - 8R_L/3;\ DF = D_L;$$
$$AE = AS - SE = R_S - R_T;\ CE = D_S.$$

Substituindo estes valores na igualdade anterior,

$$\frac{R_T - \frac{8}{3}R_L}{D_L} = \frac{R_S - R_T}{D_S}$$

Da seção anterior temos que

$$D_S = bD_L,\ R_S = aD_S = abD_L,\ R_L = ad_L,$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{-\frac{8}{3}aD_L}{D_L} = \frac{abD_L - R_T}{bD_L}$$

Daqui segue-se que

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)R_T = \left(\frac{8}{3}+1\right)aD_L,$$

ou ainda

$$D_L = \frac{3(b+1)R_T}{11ab}.$$

Então,

$$D_S = bD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11a},$$

$$R_S = abD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11}$$

e $$R_L = aD_L = \frac{3(b+1)R_T}{11b}.$$

Deste modo, substituindo a = tg 1° ≅ 0,017 e $b \cong 20$, podemos obter as quatro grandezas, D_L, D_S, R_S, e R_L, em termos do raio da Terra R_T, com os dados de Artistarco:

$$D_L \cong 16{,}8\ R_T,\ DS \cong 337\ R_T,$$

$$R_S \cong 5{,}7\ R_T,\ R_L \cong 0{,}29\ R_T.$$

Ao contrário, com os valores mais corretos — a = tg 1/4º ≅ 0,0044 e $b = 400$, encontramos valores bem próximos dos valores modernos:

$$D_L \cong 62\ R_T,\ D_S \cong 24855\ R_T,$$

$$R_{Ss} \cong 109\ R_T \text{ e } R_L \cong 0{,}27\ R_T,$$

Os cálculos que vimos descrevendo encontram-se num livro de Aristarco, intitulado *Sobre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua*. Esta é a única obra de Aristarco que chegou até nós. Dela existe uma primorosa edição comentada, com uma história da Astronomia Grega até os tempos de Aristarco, devida ao eminente historiador da ciência, Thomas Heath.

Eratóstenes e o raio da Terra

Pelo que vimos até agora, basta saber o raio da Terra para podermos calcular os tamanhos e as distâncias a que se encontram o Sol e a Lua.

Foi Eratóstenes (276-196 a.C.), outro sábio de Alexandria, quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade. Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno, para nós, habitantes do hemisfério Sul), os raios solares caíam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, hoje Assua, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos daquela cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caiam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de 7,2° com a vertical (Figura 7), ou seja, 1/50 da circunferência completa, que é de 360°. Como os raios solares são praticamente paralelos, isso significa que o ângulo central $\widehat{ACS}$ também mede 7,2°. Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos,

$$\frac{2\pi\pi}{AS} = \frac{360^{\circ}}{7{,}2^{\circ}}$$

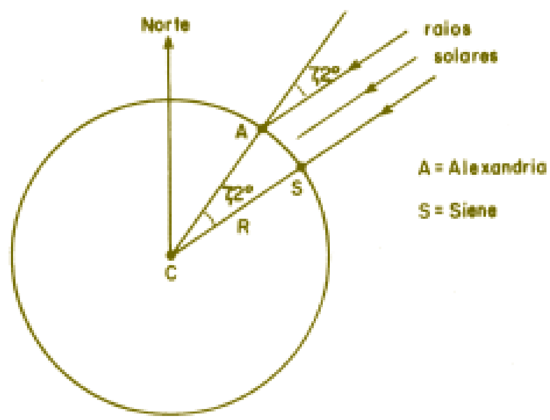


Figura 7

onde R é o raio da Terra. Como a distância $\widehat{AS}$ de Alexandria a Siene era conhecida e igual a 45 000 estádios, podemos calcular a circunferência terrestre:

$$2\pi R = 5000 \times \frac{360}{7{,}2} \cong$$

$$250000 \text{ estádio} \cong 46300 \text{ km}$$

$$R \cong \frac{250000 \times 185}{6{,}28} \cong 7365 \text{ km.}$$

O valor atual, no equador, é de 6378 km, mostrando que o resultado de Eratóstenes é bastante razoável.

Ptolomeu e a distância da Terra à Lua

Cláudio Ptolomeu foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua famosa obra, o *Almagesto*, inclui, além de suas contribuições próprias, as de seus vários predecessores. Pelos muitos fatos citados nesse livro, dentre eles vários eclipses, infere-se que Ptolomeu teria vivido por volta do ano 150 de nossa era.

Ptolomeu propôs um método bastante engenhoso e simples para calcular a distância da Terra à Lua. Para isso imaginemos que um observador em A (Figura 8) veja a Lua na posição L, sobre a vertical de A. Depois de um certo tempo t, o observador passa da posição A à posição A', devido ao movimento de rotação da Terra. Ao mesmo tempo a Lua passará à posição L'. Como os ângulos $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{ACL'}$ são conhecidos (pois os movimentos da Terra e da Lua são conhecidos), também é conhecido o ângulo $y = \widehat{ACA'} - \widehat{ACL'}$. O ângulo α é medido diretamente, o que permite conhecer seu suplementar β. Assim, o triângulo $CA'L'$ fica completamente determinado pelo lado $CA' = R$ (raio da Terra) e os ângulos β e γ. Portanto, a distância CL' da Terra à Lua pode ser determinada em termos de R.

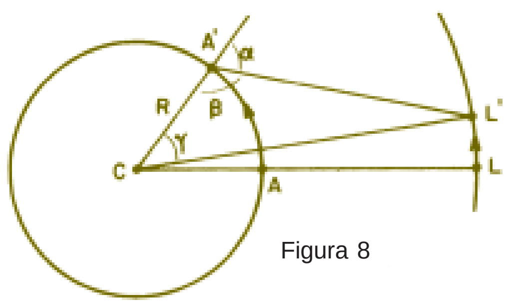


Figura 8

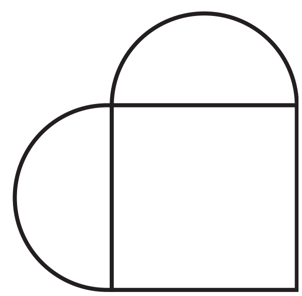
O lado romântico da Geometria

Hideo Kumayama

A construção de caixas em formato de coração utiliza o comprimento da circunferência e a comparação de medidas.

No ano letivo de 2001, nas turmas de 8ª série, valendo-me da proximidade do dia das mães, resolvi propor a seguinte atividade:

Numa folha de papel cartão/cartolina, construir dois semicírculos com o diâmetro nos dois lados consecutivos de um quadrado e recortar.



Os alunos ficaram perplexos com o resultado!

"Coração, professor!" Afirmaram.

Assim, eles aprenderam esse novo modo de construir um coração! Uns dobraram uma folha ao meio e construíram cartões com formato de um coração.

Outros mais ousados queriam fazer caixas com formato de coração e perceberam que era necessário a medida do comprimento da folha para construir a parte lateral da caixa. A largura da folha determinaria a altura da caixa.

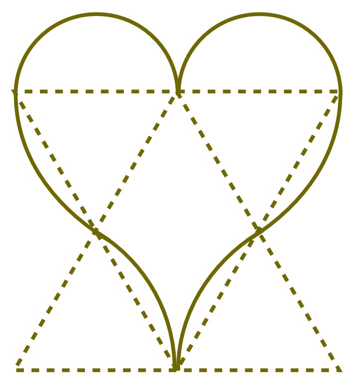
De repente, Carina, balbuciou: "Comprimento da circunferência mais dois lados do quadrado, professor!"

Carina fez duas caixas: numa delas partiu de um quadrado de 146 mm e noutra partiu de um quadrado de 150 mm, assim a caixa maior serviu de tampa. Perguntei a finalidade da caixa e Carina disse que iria presentear a mãe com um CD.

Poderia ter provocado outros desdobramentos, como construir uma caixa coração para transferir os bombons de uma caixa prismática de base retangular (daquelas que normalmente encontramos nos supermercados). Essa situação envolveria cálculo de volumes.

Uma outra atividade interessante: construir dois triângulos equiláteros invertidos e concordar arcos de 60° (raio igual metade do lado) e arcos de 180° (raio quarta parte do lado)!

Poderemos investigar muita geometria nessa romântica figura.



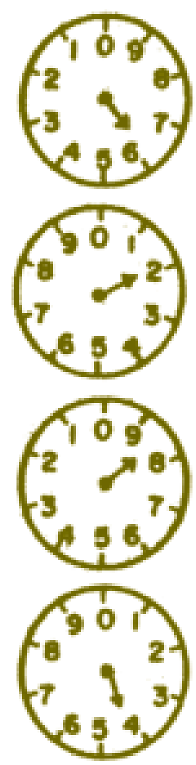
Você sabe ler seu relógio de luz?

Ernesto Rosa Neto

Este texto e o próximo permitem uma atividade que traz para a sala de aula as "contas de luz e água", que fazem parte do nosso cotidiano, mas são, na verdade, um grande enigma para a maioria da população.

A compreensão da leitura do relógio de luz está intimamente ligada à compreensão do sistema posicional. O trabalho aqui proposto pode ser desenvolvido em sala de aula desde a 5ª série. Para esta atividade sugere-se que o professor peça aos alunos que façam e tragam para a escola a leitura dos relógios de luz e contas de água de suas casas.

Com o racionamento de energia, para evitar uma multa injusta, precisei entrar em contato com a prestadora de serviço, que me pediu a leitura do relógio, que se apresentava assim:



Liguei e passei a leitura feita para a pessoa que me atendeu: 6184.

Ela me disse que precisava saber exatamente onde estava cada ponteiro. Se o primeiro número 6 era exatamente 6 ou entre 6 e 7, mais perto de qual. Eu lhe disse que decorara os relógios e poderia dar-lhe essas respostas. Ela se admirou e perguntou onde – ficava o primeiro ponteiro. – “Fica entre o 6 e o 7, mais próximo do 6”. Numa escala de 0 a 10 fica no l, entendeu? – “Claro, disse ela!” “E o segundo ponteiro?” – Fica entre o l e o 2. Numa escala de 0 a 10 fica no 8. O terceiro fica entre o 8 e o 9 e na mesma escala fica no 4. O último fica no meio, entre o 4 e o 5. – Caramba! Que memória boa o senhor tem! – É, respondi-lhe,” o raciocínio é péssimo, mas tenho uma memória fotográfica fabulosa”.

A posição do último ponteiro eu *chutei,* porque representava pouco, eu não tinha um quinto algarismo para os décimos e não queria voltar ao relógio por tão pouco. Além do mais, as informações que dei não estavam rigorosas. Seria mais correto dizer que o primeiro número estava entre 6 e 7 e, numa escala de 0 a 1000, ficava no 184.

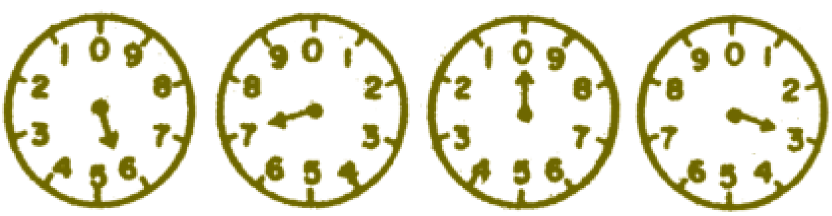
Incrível, as pessoas usam o sistema posicional todos os dias, mas não o conhecem. Como será o treinamento dos atendentes? No boleto de cobrança vem o desenho dos quatro relógios sem ponteiros, um campo para cinco dígitos e o pedido: ... *anote a posição dos ponteiros ou assinale os números*... A prática deve ter mostrado a eles que as pessoas não sabem efetuar a leitura, por isso colocaram a opção do desenho: o sintético é mais fácil que o analítico.

Como é feita sua conta de luz e água

Hideo Kumayama

Os medidores de consumo de energia elétrica, gás e água, o hodômetro de um carro, as antigas máquinas registradoras – que em muitos lugares ainda são usadas nos caixas de supermercados e casas comerciais em geral, utilizam os princípios do sistema de numeração decimal.

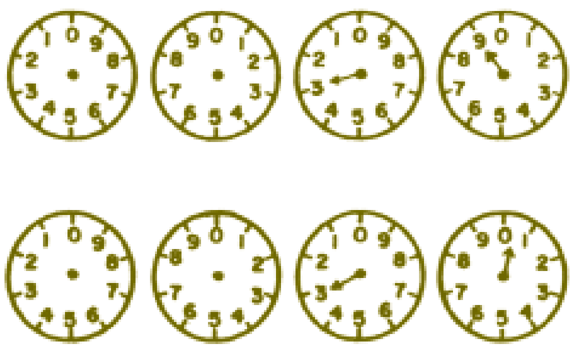
Farei aqui algumas considerações sobre a leitura dos medidores de consumo de energia elétrica.



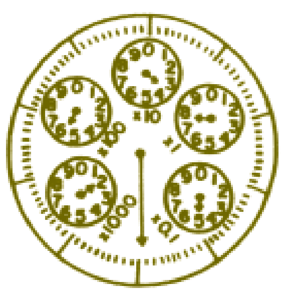
A figura acima ilustra o esquema do mostrador de um medidor, onde o consumo é dado em *kWh* (quilowatt-hora). Esse esquema é cópia do verso de uma conta de luz: seus quatro ponteiros indicam, na ordem em que aparecem, os algarismos 5 – 7 – 0 – 3. Portanto, para fazer a leitura corretamente basta anotar, na ordem em que aparecem, um algarismo para cada ponteiro, tomando o de menor valor dentre os dois entre os quais se encontra o ponteiro (ou o 9, se o ponteiro estiver entre 0 e 9).

É preciso atenção especial quando determinado ponteiro está muito próximo do zero.

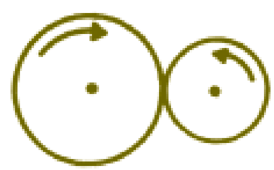
Neste caso, o ponteiro precedente também estará próximo de certo algarismo. Na, ilustração seguinte, à esquerda, por exemplo, o ponteiro da direita ou ainda não atingiu o zero – e neste caso o ponteiro precedente também não chegou no 3, e a leitura é 29 –, ou o ponteiro da direita já atingiu o zero, o da esquerda está no 3, e a leitura é 30.



A figura à esquerda ilustra um medidor de consumo de água, e a leitura é 1 537,5 m^3.



Por que, no caso do medidor de energia elétrica, os sentidos de rotação dos ponteiros são alternadamente para a direita e para a esquerda? Muito simples: isso se deve ao fato de estarem ligadas entre si as engrenagens de um par de engrenagens adjacentes, de forma que elas têm de girar em sentidos contrários (veja a figura).



Por que um ponteiro à esquerda gira mais devagar ou parece mesmo estar parado, em comparação com o ponteiro logo à sua direita? A explicação aqui também é simples e é devida a um fato fundamental do sistema decimal de numeração: dez unidades fazem uma dezena, dez dezenas fazem uma centena etc. Assim, é preciso que um ponteiro dê uma volta completa para que o ponteiro logo à sua esquerda passe de um algarismo ao seguinte; em outras palavras, a velocidade de um dado ponteiro é dez vezes a velocidade do ponteiro logo à sua esquerda.

Atividade ludo-pedagógica

Mozart Cavazza Pinto Coelho

Esta brincadeira envolve conhecimento de potência e deve ser proposta após o estudo desse conceito. Desenvolve a habilidade com números e operações aritméticas.

Instrução

Completem os espaços nas frases seguintes e, à medida que forem achando as respostas, liguem os pontos correspondentes às respostas na folha anexa. No final formará uma figura. Que FIGURA é essa?

a) O menor número natural não nulo é ____.

b) O sucessor par do número 13 é ____.

c) O valor da potência 2^4 é ____.

d) O resultado ou quociente de $\frac{121}{11}$ é ____.

e) $\sqrt{625}$ vale ____ .

f) O valor da expressão $2^4 - 2^0$ é ____.

g) Um número elevado ao quadrado dá 49; esse número é ___.

h) O valor de expressão $(\frac{\sqrt{64}}{2} - 100) + 10$ é ___.

i) O único número da seqüência: 1, 4, 9, 16, 23, 36 que não é um quadrado perfeito, é ____.

j) Os números 2, 12, 21, 78, 1890, 1894 626 são divisíveis por dois, exceto ____.

k) Um número *n* elevado ao cubo vale 64; o número *n* é ____.

l) O valor da expressão $5^2 + 2$ é ____.

m) O cubo do número 2 vale ____.

n) O número de elementos do conjunto $M = \{x\ 0\ N^* \,/\, x < 3\}$ é ____.

o) A raiz quadrada do valor da expressão $2^5 + 2\,(3^3 \div 9 - 1)$ é ____.

p) A metade do valor da expressão $2^4 \div (7 \cdot 3 - 5) + (3^3 + 2^3) \div 7$ é ____.

q) O valor da expressão $5^2 - 1$ é ____.

r) O dobro de $\sqrt{81}$ é ____.

s) Um número escrito na base 2 é 10 011; na base 10 vale ____.

t) O antecessor do número 11 é ____.

u) O dobro do sucessor do número 10 é ____.

v) A raiz quadrada de 3^4 é ____.

w) Se $x^3 = 1000$, então $2x$ = ____.

x) Entre os números 14, 17, 16, 5, o único divisível por 5 é ____.

y) O valor da expressão $20 - (6 + 4 - 7)$ é ____.

z) Do número 2000, você subtrai 1280. A seguir, divide o resultado por 5.
A raiz quadrada do número que você obteve é igual a ____.

Nem só Álgebra, nem só Aritmética

Virgolina M.Viotto

Os problemas apresentados aqui podem ser solucionados, utilizando sistemas (duas equações lineares e duas incógnitas) ou apenas uma equação e uma incógnita (que é a solução sugerida). É interessante apresentá-los e discutir as possíveis soluções quando o aluno inicia o estudo de equações lineares. Podem ser abordados mais tarde enfatizando a idéia de que o importante não é saber a regra, mas ter entendido o raciocínio.

Este artigo se inspira na linha de que se pode ensinar Matemática, no primeiro grau, por meio de dados simples tirados de fatos da vida cotidiana, evitando que um simbolismo exagerado leve à fuga do concreto e ameace tornar as aulas enfadonhas.

Acreditamos que ao partir de situações concretas, impedimos que o aluno se escravize às operações e às regras, estimulando-o a refletir sobre um problema, e não somente sobre que operações executar para resolvê-lo.

Nessa direção, apresentamos sugestão de novo enfoque para 5 problemas que, nessa ou noutra versão, são comumente estudados em sala de aula. Tentaremos ainda mostrar, nos exemplos, como um desenho da situação descrita em um problema pode ajudar na busca da solução.

Exemplo 1

Calcular dois números, dadas sua soma e *diferença.*

Sabendo que para determinar o menor deles basta dividir por 2 a diferença dos números dados, o estudante poderá sair-se bem em um exame. Mas o que restará quando a regra tiver sido esquecida?

Nossa sugestão é apresentar o problema numa situação concreta:

Mário e Roberto têm juntos 45 bolinhas. Mário tem 7 bolinhas a mais do que Roberto. Quantas bolinhas tem cada um?

Pode-se encenar o problema dando a dois alunos da classe 45 objetos (bolinhas, feijões, ou o que estiver ao alcance) e pedir que eles os dividam entre si, nas condições do problema. A classe toda será convidada a participar e todas as sugestões serão analisadas. Eventualmente a classe perceberá que, dando inicialmente ao Mário as 7 bolinhas que ele possui a mais do que Roberto e, em seguida, repartindo em partes iguais as bolinhas restantes, o problema estará resolvido.

(Posteriormente, pode-se dar ao problema um tratamento mais abstrato: Se x for o número de bolinhas de Roberto,

$$x + x + 7 = 45 \Rightarrow x = \frac{45-7}{2} = 19$$

O desenho pode ser um grande auxiliar no ensino de Matemática, mesmo fora da Geometria.

Quem já não viu o problema folclórico:

Exemplo 2

Um tijolo pesa um quilo mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo inteiro?

O seguinte desenho fala por si:

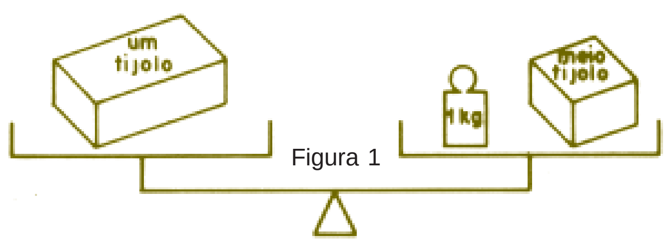


Figura 1

Se um quilo está no lugar de meio tijolo, meio tijolo pesa um quilo. Logo, o tijolo inteiro pesa 2 quilos.

(“Algebrizando”: $x = 1 + \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2$).

Exemplo 3

Se Paulo comprasse revistinhas de R\$ 15,00 *cada, ficaria com R\$* 10,00 *sobrando. Se comprasse o mesmo número de revistinhas porém de R\$* 18,00 *cada, ficariam faltando R\$* 2,00. Quantas *revistinhas Paulo pretende comprar?*

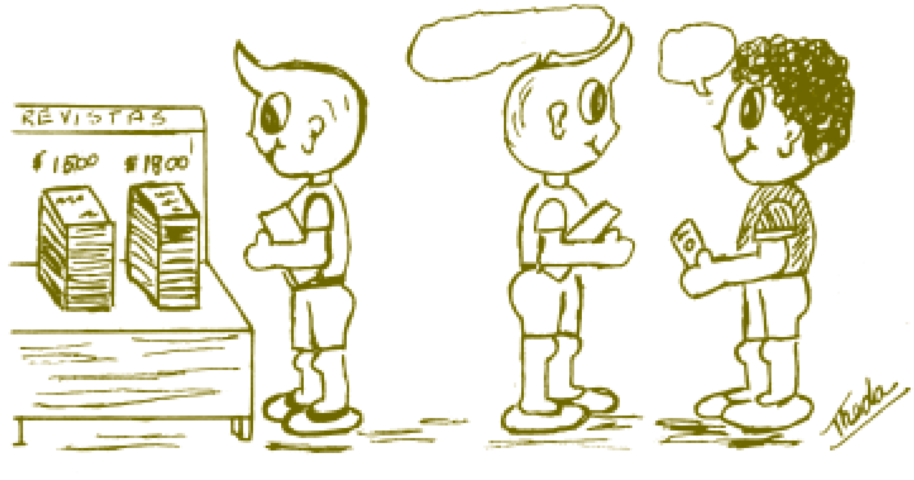


Figura 2

Para trocar as revistinhas de R$ 15,00 por revistinhas de R$ 18,00, Paulo terá que pagar R$ 3, 00 a mais por revistinha. Não tendo dinheiro suficiente, poderá tomar emprestados os R$ 2,00 que faltam e efetuar a troca (Figura 2). Como tinha R$ 10,00, tomando emprestados mais R$ 2,00, ficará com R$ 12,00. Quantas vezes R$ 3,00 estiverem contidos em R$ 12,00, são quantas revistinhas poderá comprar, isto é, 4 revistinhas de R$ 18,00.

(“Algebrizando”: se x for o número de revistinhas,

$$x \times 15 + 10 = x \times 18 - 2 \;\Rightarrow\; x = 4).$$

Exemplo 4

Uma torneira enche um tanque em 7 horas. Outra o enche em 8 horas. Abrindo ambas ao mesmo tempo, em quanto tempo o tanque estará cheio?

Se uma torneira enche o tanque em 7 horas, em uma hora encherá um sétimo do tanque. A segunda torneira, em uma hora, encherá um oitavo do tanque. As duas juntas, em uma hora, encherão

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{7+8}{56} = \frac{15}{56}$$

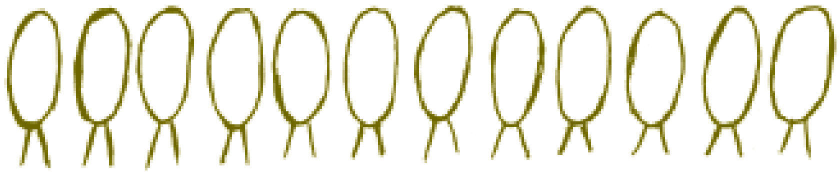
do tanque. Quantas vezez 15/56 do tanque estiverem contidos na unidade (tanque) serão quantas horas levarão ambas as torneiras para encher o tanque, isto é: Ou seja, levarão $3\frac{11}{15}$ horas, ou 3 horas e 44 minutos.

Exemplo 5

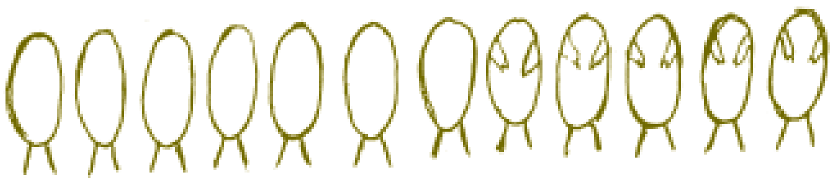
Num quintal há galinhas e coelhos, ao todo 12 *cabeças* e 34 *pés. Quantos animais de cada espécie há no quintal?*

Ao todo são 12 cabeças:

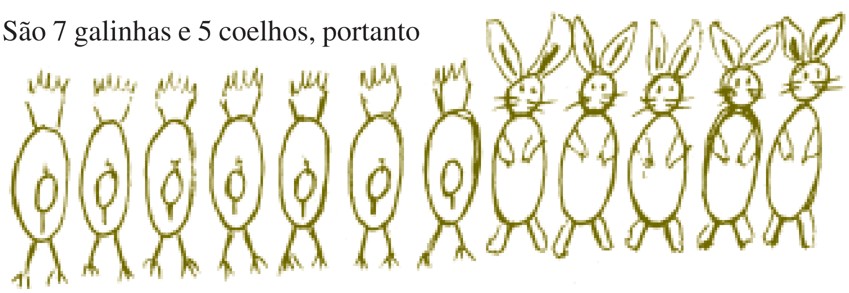
Se cada animal tivesse dois pés, teríamos, ao todo, 24 pés, ou melhor, representamos duas pernas para as galinhas e as duas pernas trazeiras dos coelhos:



Mas são 34 pés ao todo. Os 10 restantes, 2 a 2, correspondem a coelhos:



São 7 galinhas e 5 coelhos, portanto



Observação final

Durante muitos anos, no ensino fundamental, predominavam as seguintes atitudes:

- até a 5ª série, problemas eram resolvidos com o uso, apenas, da Aritmética;
- da 6ª série em diante, com a introdução da Álgebra, os problemas passavam a ser resolvidos, exclusivamente, por processos algébricos.

E nossa opinião que o raciocínio aritmético (nos exemplos, apoiado por figuras) deva continuar sendo cultivado, mesmo após a introdução da Álgebra, ou seja, nem só Álgebra, nem só Aritmética.

Números

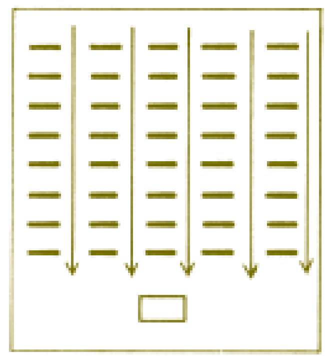
Assunto da aula "adição de números relativos"

A primeira atividade "concretiza" a noção de número negativo e a operação de adição com esses números. É interessante para ser proposta logo que os números negativos forem introduzidos.

A segunda pode ser proposta desde a 5ª série, como um desafio. Ao longo do ano pode-se propor aos estudantes que tragam novas soluções, discutam os casos mais difíceis...

O público: cerca de 40 garotos de 11 a 12 anos.

Na classe, 5 fileiras de 8 carteiras.



No início da aula o professor pediu um pequeno deslocamento das carteiras para que a cada fileira correspondesse um corredor, como no esquema ao lado. Em seguida, pediu que uma reta numerada fosse desenhada, com giz, no chão de cada corredor e nela se representassem os números de –10 a +10.

O primeiro jogo que o professor ensinou foi o seguinte:

– Um aluno coloca-se na marca do "0",

– Outro aluno dá uma instrução do tipo "ande – 3", o aluno que estava no "0" anda até " – 3".

– Outro aluno vai para o "0", a ordem "ande 5" faz com que ele se desloque até +5.

– Rapidamente todos aprenderam o jogo.

A brincadeira seguinte envolvia 3 alunos de cada fileira (os outros controlavam) e consistia no seguinte:

– um 1º aluno se colocava na marca do zero,

– um 2º aluno dava as ordens,

– um 3º aluno registrava no quadro negro, dividido em 5 colunas, o que estava sendo feito.

O 2º aluno dava ordens do tipo: “ande – 2 e depois ande – 4 e diga onde parou”.

O 1º aluno executava as ordens e dizia: “– 6”.

O 3º aluno escrevia:

(–2) + (–4) = (–6). Isto era repetido:

“ande – 3, depois + 5 e diga onde parou” – resposta: +2 – registrava-se:

$$(-3) + (+5) = (+2)$$

A brincadeira continuou bastante tempo, com envolvimento total da classe. (Disse-me o professor que, às vezes, dividia cada fileira em 2 times: um time dando as ordens, e o outro executando e registrando os resultados. Quando alguém errava, os times trocavam de papel).

Uns 10 minutos antes de terminar a aula, o professor pediu silêncio, dizendo que agora era a vez de ele entrar na brincadeira.Desenhou no quadro negro a reta numerada.

e perguntou à classe:

“Quanto é – 4 + 7?”

Foi muito interessante observar o movimento que os garotos faziam com os dedos:

e o grito: +3.

Disse-me o professor que nas aulas seguintes sempre desenhava a reta numerada no quadro negro mas, cada vez menos alunos precisavam mover o dedo para chegar ao resultado de uma adição. Aparentemente, os alunos vão percebendo como efetuar as adições, sem que jamais o professor precise dar a receita: “sinais iguais, soma e dá o sinal comum; sinais diferentes...”

O problema dos quatro “quatros”

A primeira vez que vi o problema dos quatro “quatros” foi como aluna de colégio.

O problema pedia que se escrevessem todos os números inteiros de 1 a 100 com quatro “quatros”.

$$0 = 44 - 44; \quad 1 = \frac{44}{44}; \quad 2 = \frac{4}{4} + \frac{4}{4};$$

$$3 = \sqrt{4} + \sqrt{4} - \frac{4}{4}; \ \text{etc.}$$

Já como professora de Matemática, e durante muitos anos, nem meus alunos, nem eu, conseguíamos escrever 33 e 41 com quatro “quatros”.

Mas, eventualmente, de tanto propor o problema, um aluno, um dia, trouxe uma solução:

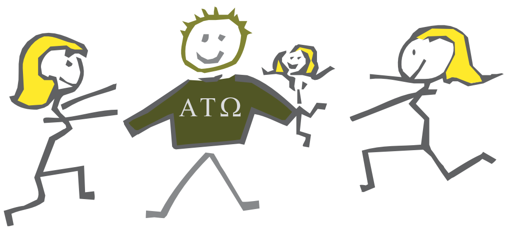
$$33 = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{4^{4!}}}} + \sqrt{4}}{\sqrt{4}},$$

e anos mais tarde, outro descobriu que

$$41 = \sqrt{\frac{(4\sqrt{4})! + 4!}{4!}}.$$

Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade

Lúcia A. de A. Tinoco



A seguir temos o relato de uma experiência realizada com alunos da 7ª série trabalhando a noção de proporção e apresentando as dúvidas, interpretações e modos de resolver que ocorreram aos alunos envolvidos. A proporcionalidade é um dos conceitos matemáticos mais presentes na vida, todas as pessoas passam por experiências que possibilitam o contacto com algumas noções desse conceito ou, pelo menos, a constatação da não aquisição de tais noções.

A partir da observação de medidas de grandezas proporcionais, que variam em situações do quotidiano dos alunos, o grupo do Setor Matemático do Projeto Fundão acredita que o conceito de proporcionalidade pode ser construído.

O trabalho dessa equipe envolve atividades com escala, receitas, merenda e outras coisas, baseadas na vida real, todas orientadas no sentido de levar o aluno a detectar os dados do problema e organizá-los, de preferência em tabelas, para melhor observar suas relações.

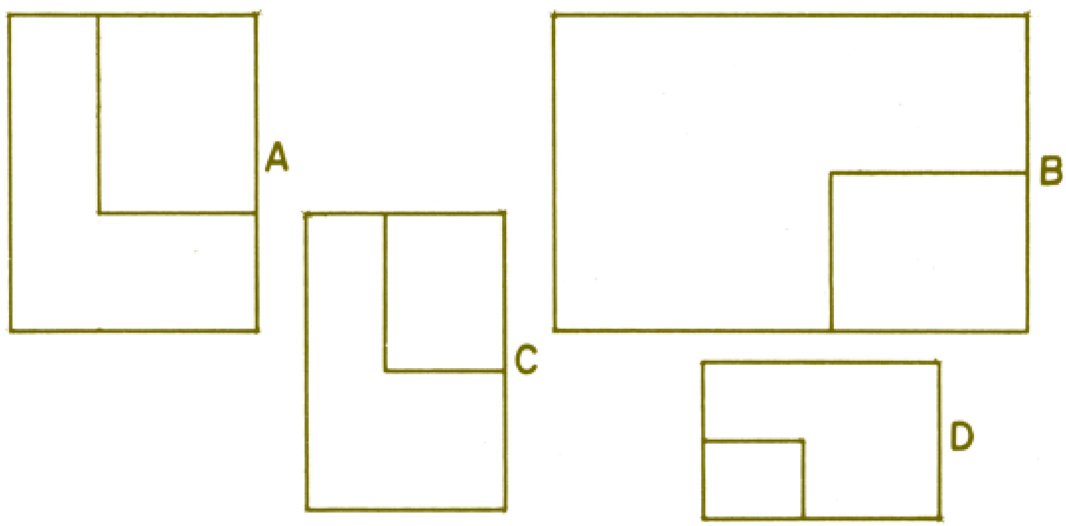
A experiência foi feita com turmas da 7ª série do ensino fundamental (12 a 14 anos).

Um primeiro exemplo de tais atividades

Entregar a cada aluno uma folha em branco a ser colocada num certo canto da carteira.

Entregar outra folha na qual estejam desenhadas quatro figuras: *A, B, C* e *D* (ver Figura abaixo). Destas, apenas duas, *B* e *D*, representam o tampo da carteira com a folha no canto, em escalas, por exemplo, de 1/5 e 1/10. Na primeira, *A,* a folha está com as dimensões proporcionais às da real, mas a carteira não; e na terceira, *C,* a carteira está reduzida corretamente, mas a folha não.

Discutir com os alunos as respostas a perguntas do tipo: *qual (is) das figuras poderia(m) ser uma fotografia da carteira com a folha? Por quê?*



A partir de respostas (em geral corretas), como "a segunda, porque, nessa outra, a folha está muito comprida" e outras, os alunos passam a medir todas as dimensões da figura real e dos desenhos. De início, essas medidas são anotadas sem qualquer ordem e, aos poucos, os alunos sentem a necessidade de alguma organização. Se for preciso, o professor sugere a utilização de tabelas. A partir daí, concluem que:

1º) quando há proporcionalidade, toda vez que um número de uma situação fica multiplicado (ou dividido) por um número *c*, o correspondente da outra situação também fica multiplicado (ou dividido) por esse número *c*;

2º) a razão entre cada par de números correspondentes nas duas situações é sempre constante.

Essas conclusões surgirão com maior facilidade, dependendo da familiaridade do aluno com a situação apresentada, e da simplicidade dos fatores de proporcionalidade. Afirmamos, também, que a segunda conclusão é muito mais difícil que a primeira, já que o conceito de razão é construído lentamente.

Um outro exemplo de tais atividades

– Apresentar aos alunos o problema:

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 latas de tinta concentrada, 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

De início, os alunos são deixados livres para resolver e discutir o problema. Depois, para melhor explorar a situação, o professor faz outras perguntas sugeridas pela tabela a seguir, que deve ser completada pelos estudantes, pedindo a eles que explicitem, a cada linha preenchida, as operações que fizeram, perguntando, por exemplo: como foram obtidos os números da 2ª linha?

Tinta concentrada	Água	Tinta diluída
4	6	
8		
	3	
1		

Observações quanto à reação dos alunos

O aluno que não tem nenhuma idéia de proporcionalidade poderá responder 10 na 2ª linha da 2ª coluna: “Já que $4 + 2 = 6$, então faço $8 + 2 = 10$.”

Para esse aluno, as quantidades só se alteram por meio de adições ou subtrações. Ele não pensa em multiplicações. Para permitir que o aluno perceba seu erro, pode-se apresentar a ele outra tabela, como:

Tinta concentrada	Água	Tinta diluída
4	6	
	2	

A resposta na 2ª linha da 1ª coluna, de acordo com o raciocínio aditivo, seria 0. Bastaria portanto, para indicar o erro, perguntar ao aluno se ele ficaria com água pura.

O raciocínio multiplicativo, necessário à construção da proporcionalidade, só é adquirido pelos alunos a partir de muitas experiências, as mais variadas possíveis, desde que iniciando por situações que envolvam fatores simples (o dobro, a metade, ...).

Por exemplo, na primeira tabela, a 2ª linha será obtida da 1ª, por meio da multiplicação por 2, bem como a 3ª linha, por meio da divisão da 1ª por 2.

Além dos fatores envolvidos, o tipo de números que aparecem nos dados ou nos resultados influi decisivamente no desempenho dos alunos. Ainda observando a primeira tabela, a dificuldade na 4ª linha surge, não porque envolva fatores complicados (ela pode ser obtida da 3ª por redução à metade), mas porque a resposta é um número fracionário (3/2 ou 1,5).

Modelo aditivo × modelo multiplicativo

Embora reconhecendo que a decomposição dos dados em parcelas e a utilização de multiplicações por fatores bem simples é suficiente para os alunos resolverem a grande maioria dos problemas a eles apresentados, deparamo-nos com duas questões, a saber:

(a) *Os alunos, que resolvem os problemas de proporcionalidade pelo modelo aditivo (decomposição em parcelas), sabem por que podem fazer isso?*

(b) *É aconselhável levar esses alunos a resolver tais problemas pelo reconhecimento da igualdade de duas razões?*

A esse respeito, relataremos, a título de exemplo, entrevista feita com aluna da 7ª série, ao final do estudo do tópico de proporções.

Ressaltamos a importância do método de entrevista para melhor conhecer o raciocínio do estudante, *mas* lembramos que o exemplo aqui apresentado não deve ser encarado como um modelo a ser repetido. Outros alunos darão outras respostas e outras respostas exigem novas perguntas.

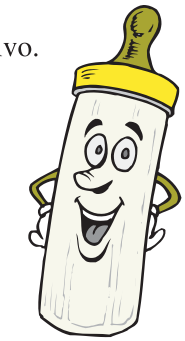
E: entrevistador. A: aluna.

E – Resolva esse problema:

Numa creche, 4 *litros de leite dão para preparar* 22 *mamadeiras iguais. Quantas mamadeiras iguais a essas poderão ser preparadas com* 10 *litros de leite?*

A dificuldade essencial, nesse caso, é reconhecer 10 como um múltiplo de 4: muitos alunos acreditam que não existe um número que multiplicado por 4 dê 10.

Tal dificuldade é contornada pelo uso do modelo aditivo.



A: $\begin{array}{ccc} 4 & \to & 22 \\ 10 & \to & 55 \end{array}$

55 mamadeiras

E – Explique o que você fez.

A – Se 4 litros dão 22 mamadeiras, 4 + 4 = 8 dão 22 + 22 = 44 e 2 dão 11 mamadeiras, logo, 10 litros dão 55 mamadeiras.

E – Por que você fez assim?

A – Porque é mais fácil.

E – É sempre possível resolver assim?

A – Depende do problema.

Para refletir sobre a questão, o entrevistador apresenta à aluna outro problema.

Com 24 *metros de brim, podem-se fazer* 16 *calças iguais. Quantas calças iguais a essas podem-se fazer com* 15 *metros do mesmo tecido?*

A – No primeiro, eu multipliquei, e agora, de 24 para 15 não posso multiplicar. Então a resposta é 7.

E – O que voce fez?

A – 24 menos 16 dá 8. Então diminuí 8 de 15.

E – Observe o outro problema:

Com 24 *metros de brim, podem-se fazer* 8 *calças iguais. Quantas calças iguais a essas podem-se fazer com* 12 *metros do mesmo tecido?*

A – (corretamente) 4, porque 12 é a metade de 24.

E – Pelo método do problema anterior você teria: 24 menos 8 dá 12 e 12 menos 12 dá zero!

(A percebeu logo, e sozinha, que ainda estava errada).

E – Vamos tentar ver a razão constante. Na primeira situação ...

A – 24 metros e 16 calças

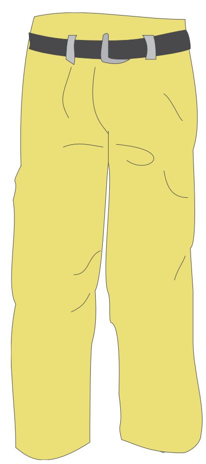
E – Se eu pedisse para você achar o pano gasto em cada calça, o que você faria?

A – 24 dividido por 16.

E – Isso é $\frac{24}{16}$ **.**

E – Agora na segunda situação: 15 metros e x **calças. Qual é a conta?**

A – Não dá para fazer; eu não sei quanto é esse x.



E – Faz de conta que você sabe.

A – Então é 15 dividido por esse x.

E – Então é $\frac{15}{x}$ **, certo?**

A – Certo.

E – (Apontando para $\frac{24}{16}$ **.)**

Isso não é o pano de cada calça?

A – É.

E – (Apontando o $\frac{15}{x}$ **.)**

Isso aqui também é?

A – É.

E – As calças são iguais?

A – São.

E – Posso escrever um igual ao outro?

A – Pode.

E: $\frac{24}{16} = \frac{15}{x}$ **.**

Agora você pode resolver.

A (demonstrando dificuldade no produto “em cruz”):

$$24x = 16 \times 25$$

$$x = \frac{16 \times 25}{24} = \frac{2 \times 25}{3} = \frac{50}{3}.$$

Conclusões

As dificuldades apontadas inicialmente são reais.

Não se deve impor a solução dos problemas de proporcionalidade direta pela igualdade de duas razões; a solução pela decomposição em parcelas é válida (como outras não analisadas aqui).

O importante é que, ao utilizar qualquer método, o aluno saiba *por que* pode utilizá-lo.

É importante que o aluno saiba que existe a solução mais econômica da proporção, para que possa optar por ela, se julgar necessário.

Regra de três composta

Os problemas sugeridos aqui trabalham o raciocínio do aluno para que ele apreenda a idéia que está por trás da regra de três. É interessante propor os problemas e discutir diferentes formas de solucioná-los.

Apesar de a "regra de três composta" ser tratada em textos didáticos e já ter sido discutida em vários números da **RPM**, nossos leitores continuam consultando-nos a respeito de problemas envolvendo proporcionalidade, como os problemas **A** e **B** abaixo. Há vários modos de resolver esses problemas e cada autor, bem como cada professor, acha, é claro, que o "seu jeito" é o melhor. Voltamos ao tema, apresentando duas soluções alternativas para cada um dos problemas **A** e **B**, consideradas, é claro, como as "melhores" pelos seus autores.

Problema A

21 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintam um edifício em 6 dias. Nas mesmas condições, quantos dias serão necessários para que 9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, pintem o mesmo edifício?

Resolução 1

Sempre é possível resolver esse tipo de problema com a chamada "redução à unidade", que consiste no seguinte:

21 pintores, trabalhando 8 horas por dia, pintam o edifício em 6 dias;

1 pintor, trabalhando 8 horas por dia, pinta $\frac{1}{21}$ do edifício em 6 dias;

1 pintor, trabalhando 1 horas por dia, pinta $\frac{1}{21}\times\frac{1}{8}$ do edifício em 6 dias;

1 pintor, trabalhando 1 horas por dia, pinta $\frac{1}{21}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}$ do edifício em 1 dia;

9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, pintam $9\times 7\times\frac{1}{21}\times\frac{1}{8}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{16}$ do edifício em 1 dia.

logo, 9 pintores, trabalhando 7 horas por dia, precisam de 16 dias para pintar o edifício todo. Fácil, não é?

Resolução 2

Montando uma equação algébrica que exprime a dependência entre as variáveis envolvidas no problema:

Sejam p o número de pintores, h o número de horas que eles trabalham por dia e d o número de dias. O produto phd é o número total de horas trabalhadas; logo, deve ser o mesmo nas duas situações descritas, isto é,

$$21\times 8\times 6 = 9\times 7\times d\,,$$

de onde $d=\frac{21\times 8\times 6}{9\times 7}=16$ dias.

Pronto, terminou o problema! Lembre-se: regra de três (simples), direta ou inversa; não passe de uma equação algébrica simples e fácil de resolver.

Problema B

Se 10 *máquinas, funcionando* 6 *horas por dia, durante* 60 *dias, produzem* 90 000 *peças, em quantos dias*, 12 *dessas mesmas máquinas, funcionando* 8 *horas por dia, produzirão* 192 000 *peças?*

Resolução 1

Novamente, é possível resolver esse problema com a chamada "redução à unidade":

10 máquinas	6 horas por dia	60 dias	90 000 peças
1 máquina	6 horas por dia	60 dias	9 000 peças
1 máquina	1 hora por dia	60 dias	$\frac{9\,000}{6}$ peças
1 máquina	hora por dia	1 dia	$\frac{1\,500}{60} = 25$ peças
12 máquinas	1 hora por dia	1 dia	$12 \times 25 = 300$ peças
12 máquinas	8 horas por dia	1 dia	$8 \times 300 = 2\,400$ peças

Então, 12 máquinas, trabalhando 8 horas por dia, fazem 2 400 peças. Logo, para produzir 192 000 peças serão necessários

$$\frac{192000}{2400} = 80 \text{ dias.}$$

Resolução 2

Montando uma equação algébrica que exprime a dependência entre as variáveis envolvidas no problema:

Sejam m o número de máquinas, h o número de horas de funcionamento por dia, d o número de dias, e p o número de peças produzidas.

Se k é o número de peças que cada máquina produz por hora, temos:

$$p = k \times m \times h \times d$$

ou

$$k = \frac{p}{m \times h \times d}$$

Substituindo na equação obtida as duas seqüências de valores dadas no problema, temos:

$$\frac{90000}{10 \times 6 \times 60} = k = \frac{192000}{12 \times 8 \times d},$$

de onde $d = \dfrac{10 \times 6 \times 60 \times 192000}{90000 \times 12 \times 8} = 80.$

VOCÊ SABE POR QUE FUNCIONA?
Considere os exemplos abaixo:

867
86 – 9 × 7 = 23

23 não é divisível por 13, logo 867 também não.

8 281
828 – 9 × 1 = 81**9**
81 – 9 × 9 = 0

0 é divisível por 13, logo 8 281 também é.

36 546
3 654 – 9 × 6 = 351**0**
351 – 9 × 0 = 35**1**
35 – 9 × 1 = 26
23 é divisível por 13, logo 36 546 também é.

77 741
7 774 – 9 × 1 = 7 76**5**
776 – 9 × 5 = 73**1**
73 – 9 × 1 = 64

64 não é divisível por 13, logo 77 741 também não.

Que regra os exemplos sugerem? Como provar que é verdadeira ou não?

Uso inteligente da calculadora

Hideo Kumayama

Atividades envolvendo o uso da calculadora podem contribuir para motivar diversos tópicos do conteúdo. Esta atividade em particular trata de "números grandes" e de como contornar as limitações impostas pela calculadora.

É preciso que o estudante já domine a notação de potência para descrever números grandes. É interessante enfatizar que a calculadora é uma ferramenta com limitações que podem ser contornadas, se usarmos nossos conhecimentos. Outra possibilidade é explorar nessa atividade números surpreendentes como: distância da Terra ao Sol, distância de Plutão ao Sol etc. O professor de Ciências pode ter boas sugestões de "números grandes".

Introdução

Segundo uma conhecida lenda originária da Índia, o rei Shirham recebeu de presente do grão-vizir Sissa Bem Dahir um jogo de xadrez, inventado por ele próprio. De imediato, o rei decidiu retribuir essa dádiva, mas não sabia como. Assim, o rei deixou a escolha da recompensa a critério do vizir, o qual pediu: Majestade, dê-me um grão de trigo correspondente à primeira casa do jogo de xadrez, dois grãos correspondendo à segunda casa, quatro à terceira, e assim sucessivamente, sempre dobrando o número de grãos, até a 64ª casa. O rei ficou espantado com a simplicidade do pedido, porém mais surpreso ainda ficou quando constatou que não conseguiria satisfazê-lo, pois o número total de grãos no tabuleiro, a saber, $2^{64} - 1$, é um número imenso. De fato, usando uma calculadora científica com 12 dígitos no visor, obtém-se para esse número $1{,}84467440733 \times 10^{19}$.

Esse exemplo é muito usado em aula, especialmente no estudo de progressões geométricas. Porém os alunos muitas vezes se perguntam: Mas o número $2^{64} - 1$ não é inteiro? É possível, com a calculadora determinar todos os algarismos desse número? A resposta é sim.

Primeiro observa-se que o resultado fornecido pela calculadora é

$2^{64} = 1{,}84467440737 \times 10^{19} = 18\,446\,744\,073\,700\,000\,000$. Na realidade, isso é uma aproximação do verdadeiro resultado, dada a impossibilidade de a calculadora exibir todos os 20 algarismos desse número inteiro. Temos que nos precaver ainda contra o fato de que o último 7 pode não ser exato; ele pode ter sido aproximado para cima. (Por exemplo, se você preparar sua calculadora para trabalhar com 4 dígitos no visor, ela vai dar: $2^{64} = 1{,}845 \times 10^{19}$. Alguém poderia erradamente concluir que o quarto algarismo de 2^{64} é 5, quando na realidade é 4, que foi aproximado para 5 porque o seguinte era $6 \geq 5$.) Portanto, o que sabemos mesmo é que $2^{64} = 1{,}84467440737$ xxx xxx xxx. Nosso objetivo é descobrir quais são os 9 últimos algarismos desse número, sendo o primeiro deles igual a 6 ou 7.

Uma forma de proceder é a seguinte.

A calculadora com 12 dígitos no visor consegue exibir todos os algarismos de

$$2^{32} = 4\,294\,967\,296 = 42\,949 \times 10^5 + 67\,296.$$

Denotando-se $a = 42\,949$ e $b = 67\,296$, tem-se:

$$2^{64} = (2^{32})^2 = (a \times 10^5 + b)^2 = a^2 \times 10^{10} + 2ab \times 10^5 + b^2.$$

A primeira parcela é um inteiro terminado em 10 zeros e, portanto, não vai influir nos últimos 9 algarismos da soma. Os números $2ab$ e b^2 podem ser calculados na calculadora, obtendo-se $2ab \times 10^5 + b^2 =$ $= 578\,059\,180\,800\,000 + 4\,528\,751\,616$. Neste ponto, não adianta fazer essa soma na calculadora, porque a primeira parcela não cabe no visor. Como porém estamos interessados apenas nos 9 últimos algarismos desse número, fazemos: $180\,800\,000 + 528\,751\,616 = 709\,551\,616$. Conclui-se finalmente que $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$.

A propósito de exercícios, o leitor pode experimentar outras maneiras de decompor 2^{32} em parcelas. Verá que algumas funcionam melhor que outras. Por exemplo, na decomposição $2^{32} = 429 \times 107 + 4\,967\,296$, o quadrado da segunda parcela não caberá no visor.

O que acontece, se só dispusermos de uma calculadora "do feirante", com apenas 8 dígitos no visor? Neste caso, já 2^{32} não cabe no visor, aparecendo 42,949672 e $4{,}2949672 \times 10^9$.

Em primeiro lugar, deve ser lembrado que é perfeitamente possível calcular rapidamente potências nesse tipo de calculadora. Em seguida, pode-se usar um procedimento análogo ao precedente, partindo de $2^{16} = 65\,536$, para determinar os 3 algarismos de $2^{32} = 4\,294967$ xxx.

Por exemplo: $2^{32} = (2^{16})^2 = (65 \times 10^3 + 536)^2 = 4\,225 \times 10^6 + 69\,680 ´ 10^3 + 287\,296$. Aqui, a primeira parcela termina em 6 zeros e a segunda, em 4 zeros. De modo que os 3 últimos algarismos de 2^{32} são 296 e, portanto, $2^{32} = 4\,294\,967\,296$.

Na calculadora de 8 dígitos no visor, o número 2^{64} aparece como

$$1{,}8446744 \times 10^{19} = 18\,446\,74x\ xxx\ xxx\ xxx\ xxx,$$

e precisamos descobrir seus 13 últimos algarismos. Agora, não adianta decompor 2^{32} como feito anteriormente, pois aparecerão números com mais de 8 algarismos.

Um caminho promissor é decompor 2^{32} em 3 parcelas convenientemente escolhidas e, em seguida, utilizar a fórmula

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$ Assim:

$2^{64} = (2^{32})^2 = (4\,294 \times 10^6 + 967 \times 10^3 + 296)^2$. Agora, a calculadora permite calcular:

$$\begin{array}{rcr}
4\,294 \times 10^{12} & = & 18\,438\,436\,000\,000\,000\,000 \\
2 \times 4\,294 \times 967 \times 10^9 & = & 8\,304\,596\,000\,000\,000 \\
(967^2 + 2 \times 294 \times 296) \times 10^6 & = & 3\,477\,137\,000\,000 \\
2 \times 967 \times 296 \times 10^3 & = & 572\,464\,000 \\
296^2 & = & 87\,616 \\
\hline
2^{64} & = & 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616
\end{array}$$

Esperamos que esses exemplos estimulem o leitor a usar inteligentemente a sua calculadora, para superar as limitações desse instrumento.

Algarismos romanos. Uma aula diferente

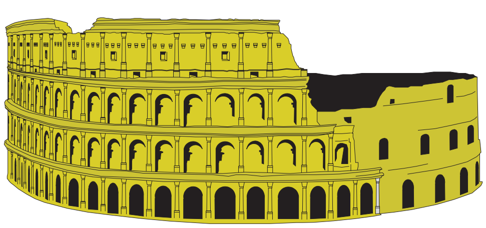
Márcia de Oliveira Rebello
Rosângela Tortora

Uma atividade lúdica que explora a competitividade natural entre as crianças, por meio de um jogo, para estudar os algarismos romanos.

Não deve existir um método "ótimo" para ministrar aulas, que torne todas elas interessantes e que faça com que *todos* os alunos gostem e aprendam Matemática.

Sabemos, porém, que, ocasionalmente, uma aula diferente, por quebrar uma rotina, estimula o interesse dos alunos e facilita o aprendizado.

O equivalente, em Matemática, à "palavra cruzada" foi por nós aproveitado para ministrar, numa 5ª série, uma aula de fixação sobre algarismos romanos, aproveitando o gosto que crianças, na faixa etária dos 11 anos, têm por jogos competitivos.



Procedemos da seguinte maneira:

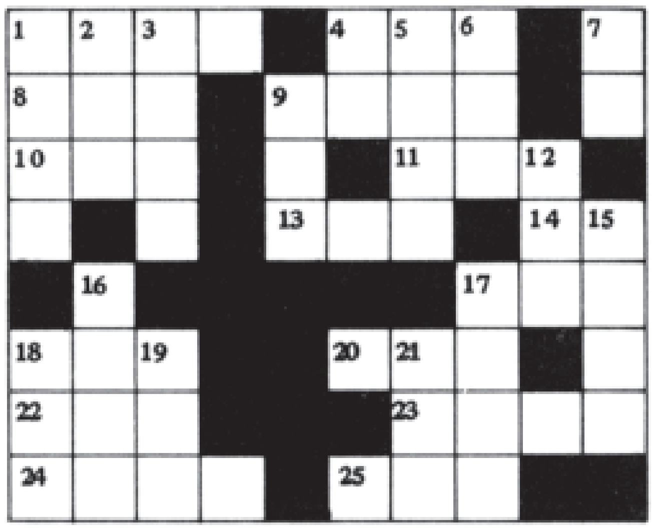
1. dividimos a classe em dois times;
2. colocamos as colunas "horizontais" e "verticais" na parte central da lousa;
3. copiamos um quadro para cada time;
4. estabelecemos as regras do jogo:

a. cada aluno pode escolher arbitrariamente qualquer questão;

b. dada a partida, um primeiro aluno, de posse de um giz, deverá ir à lousa, responder à questão que escolheu, voltar ao seu lugar e entregar o giz ao colega seguinte. Este poderá colocar a resposta de uma outra questão, *ou* corrigir uma que julgue estar errada; cada aluno, após colocar sua resposta no quadro, entregará o giz ao seguinte, que deverá proceder da mesma forma;

c) o time que terminar primeiro de preencher seu quadro, corretamente, será o campeão do dia.

Escreva com algarismos arábicos:



Horizontal	Vertical
1. MMDCXXI	1. MMDL
4. CDXXXV	2. DCXLVIII
8. DXLI	3. MMCLXXV
9. MMMXL	4. XL
10. DLXXXVII	5. MMMCDLXXVIII
11. DCCVII	6. D
13. DCXXXVIII	7. LXXXIX
14. XCII	9. CCCXLVI
17. CXII	12. DCCXCI
18. CMXLVI	15. MMCCXXII
20. CCCXXIV	16. MMMCDLXXXIX
22. DLXXXIII	17. MCDII
23. MMMXLII	18. CMLI
24. MCMLXXIV	19. DCXXXVII
25.CMLII	21. CCXXXV

Observação

Nenhum aluno deverá ir à lousa pela segunda vez, antes que todos os outros do seu time tenham ido uma vez ao menos.

Mágicas

Adivinhação

Duas "mágicas" intrigantes que levam ao estudo do critério de divisibilidade por 9. A brincadeira da caixa de palitos de fósforos pode ser feita pelo professor na sala de aula e utilizada desde a 5ª série.

Pede-se para alguém pensar em um número de vários algarismos e somar esses algarismos.

Em seguida pede-se que a pessoa subtraia a soma do número pensado.

A pessoa deve então ocultar um algarismo desse último resultado obtido e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Com isso o proponente da brincadeira "adivinha" o algarismo que foi ocultado.

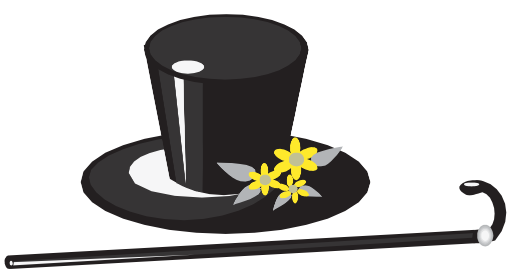
Exemplo

Número pensado: $A = 6435879$

$A - S =$

$= 6435879 - (6 + 4 + 3 + 5 + 8 + 7 + 9) =$

$= 6435879 - 42 = 6435837.$



A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo **8** e fornece a soma dos outros que é

$$6 + 4 + 3 + 5 + 3 + 7 = 28.$$

Como **a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 9***, "adivinha-se" que o algarismo ocultado é 8, uma vez que 28 + 8 = 36.

Esse resultado está enunciado e demonstrado abaixo.

Proposição

Seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, ..., a_n$. Se $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, então $A - S$ é um múltiplo de 9.

Demonstração

A demonstração do resultado utiliza a representação decimal do número A:

$$A = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + ... + 10a_{n-1} + a_n,$$

$A - S = (10^{n-1} - 1)a_1 + (10^{n-2} - 1)a_2 + ... + 9a_{n-1} + a_n$, que é um múltiplo de 9.

De ouvido

Alexandre Kleis

Meu irmão faz uma brincadeira com uma caixa de fósforos muito curiosa. Ele pega uma caixa, dessas comuns, e conta quantos fósforos há — 40, digamos. Dá a caixa a alguém e pede que este retire, às escondidas, um certo número de palitos; em seguida, que some os algarismos deste número e reponha esta quantidade de palitos. (Por exemplo, retira 25 palitos e repõe 2 + 5 = 7 palitos.) Aí, vem o surpreendente: pega a caixa, *balança-a, ao lado do ouvido,* faz uma cena e vaticina: "Há 22 palitos na caixa!" (para o exemplo, o que é certo: 40 – 25 + 7 = 22).

Notem: ele não viu nada, não teve nenhuma informação e, apenas pelo som dos palitos dentro da caixa, descobre a quantidade deles.

O segredo é simples. Sejam $x \in IN$ e $\overline{x}$ a soma dos algarismos da representação decimal de x. Ora, retirar x palitos e repor $\overline{x}$ palitos equivale a retirar $x - \overline{x}$ palitos. Como se sabe, x e $\overline{x}$ têm o mesmo resto quando divididos por 9, logo $x - \overline{x}$ é múltiplo de 9. Deste modo, está se retirando sempre um número múltiplo de 9 da caixa. Se ela contiver 40 palitos, teremos:

Retirando		... sobram
0	→	40
9	→	31
18	→	22
27	→	13
36	→	4

Tudo consiste então em se treinar o ouvido para identificar, pelo ruído, as cinco possíveis respostas!

O adivinho indiscreto

Esta "brincadeira" pode ser apresentada a estudantes de qualquer nível. No entanto, para um estudante já familiarizado com a noção de potência, é mais fácil explicar em que se baseia a "mágica". Uma proposta interessante é só apresentar as tabelas com os números de 1 a 31 e sugerir aos estudantes que eles mesmos coloquem os números de 33 a 63 nas tabelas.

Idéia para uma feira de ciências

Um visitante que se apresenta para o teste é convidado pelo aluno "adivinho" a dizer, dentre as seis listas exibidas mais a frente, de 32 números cada, em quais delas está a sua idade. Imediatamente o aluno adivinha a idade.

Como? Basta somar os primeiros números das listas que o visitante apontou.

Exemplos

1) Uma pessoa diz que sua idade figura nas listas 1, 3 e 6. O aluno adivinho faz: $1 + 4 + 32$ obtendo 37 anos como a idade desse visitante.

2) Se a idade do visitante é 55 anos, então está nas listas 1, 2, 3, 5 e 6. E 55 é obtido efetuando-se a soma 1 + 2 + 4 + 16 + 32.

Vejamos por que:

Um número n, entre 1 e 63, pode ser escrito como
$n = a_5 \times 2^5 + a_4 \times 2^4 + a_3 \times 2^3 + a_2 \times 2^2 + a_1 \times 2 + a_0$

sendo os números $a_0, a_1, \ldots, a_5$ iguais a 0 ou 1 (e, neste caso, a representação do número n em base 2 é, exatamente, $a_5a_4a_3a_2a_1a_0$).

Por exemplo:

$$33 = 32 + 1 = 2^5 + 1 = 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0 = (100001)_2$$

$$63 = 32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 1.2^5 + 1.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = (111111)_2.$$

Pois bem, na primeira lista do adivinho estão os números para os quais $a_0 = 1$, isto é, aqueles que terminam em 1 quando escritos em base 2; na segunda lista estão os números com $a_1 = 1$, ou seja, aqueles, entre 1 e 63, que têm 1 na segunda casa da direita para a esquerda, quando escritos em base 2; na terceira lista estão aqueles para os quais $a_2 = 1$, e assim por diante.

Eis as listas do adivinho.

Lista 1		Lista 2		Lista 3		Lista 4		Lista 5		Lista 6	
1	33	2	34	4	36	8	40	16	48	32	48
3	35	3	35	5	37	9	41	17	49	33	49
5	37	6	38	6	38	10	42	18	50	34	50
7	39	7	39	7	39	11	43	19	51	35	51
9	41	10	42	12	44	12	44	20	52	36	52
11	43	11	43	13	45	13	45	21	53	37	53
13	45	14	46	14	46	14	46	22	54	38	54
15	47	15	47	15	47	15	47	23	55	39	55
17	49	18	50	20	52	24	56	24	56	40	56
19	51	19	51	21	53	25	57	25	57	41	57
21	53	22	54	22	54	26	58	26	58	42	58
23	55	23	55	23	55	27	59	27	59	43	59
25	57	26	58	28	60	28	60	28	60	44	60
27	59	27	59	29	61	29	61	29	61	45	61
29	61	30	62	30	62	30	62	30	62	46	62
31	63	31	63	31	63	31	63	31	63	47	63

Essas listas de números podem ser feitas em tiras, todas iguais, de cartolina, lembrando um baralho, para melhor manuseio e a soma dos primeiros números pode ser feita de cabeça. O aluno deve fazê-la bem. Talvez seja melhor que *dois* alunos se encarreguem de fazê-la para conferir entre si, antes de contá-la ao visitante.

É claro, agora, porque cada idade é igual à soma dos primeiros números de cada lista em que ela esteja, não?

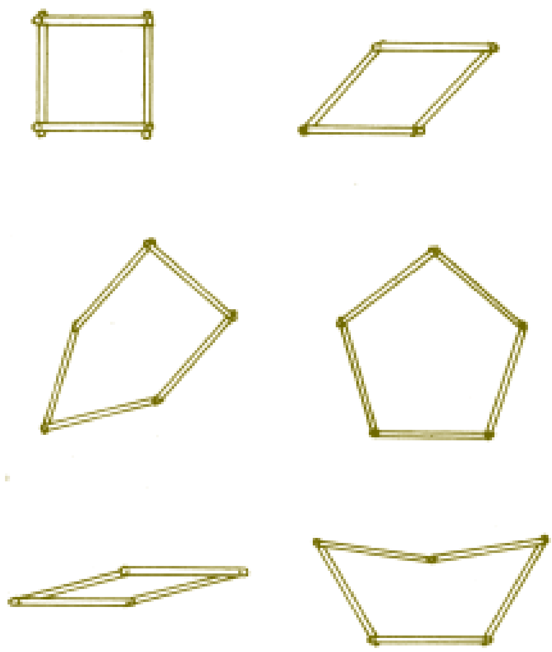
Talvez valesse a pena estender a tabela até 100 pelo menos, ou 127, para atender os avós que venham visitar a feira. Quais as modificações que precisam ser introduzidas?

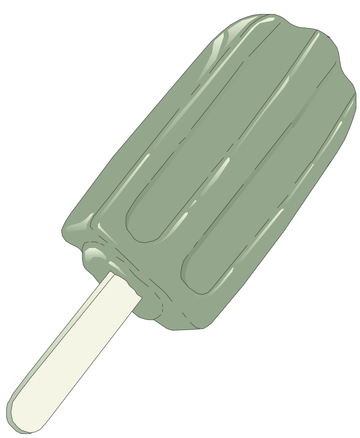
Polígonos de palitos de sorvete

Luiz Márcio P. Imenes

> Que tal levar os alunos à cantina da escola ou à padaria vizinha para comprar um picolé? Depois é só usar os palitos para estudar propriedades de polígonos regulares e dos obtidos por transformações deles.

Com palitos de sorvete e percevejos, os alunos podem construir polígonos variados: quadriláteros, triângulos, pentágonos etc.





Com este material simples, podemos trabalhar conceitos, propriedades e idéias importantes. Vejamos alguns exemplos.

1. Com exceção do triângulo, todos os demais polígonos de palitos não têm rigidez. O quadrilátero, o pentágono, o hexágono etc. são deformáveis.

O de quatro lados pode ser um quadrado que se transforma num losango (mais ou menos achatado). O de cinco lados pode ser um pentágono não regular, que se torna regular e depois pode ficar não convexo.

2. Como todos os palitos têm o mesmo comprimento, cada um dos polígonos construído é equilátero, isto é, tem todos os lados iguais. Mas, com exceção do triângulo, a igualdade dos lados não acarreta a igualdade dos ângulos. Em outras palavras, excetuando o triângulo, um polígono equilátero não é necessariamente equiângulo.

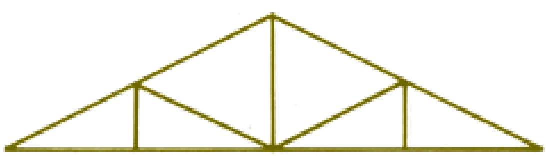
3. Esta transformação do polígono de palitos preserva a igualdade de seus lados. Preserva também o seu perímetro, mas não conserva sua área.

4. A rigidez do triângulo de palitos tem a ver com esta propriedade: os três lados determinam o triângulo.

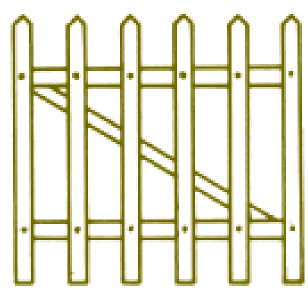
A ausência de rigidez dos demais polígonos corresponde ao seguinte: um polígono, com quatro lados ou mais, não fica determinado apenas pelos seus lados.

5. A rigidez do triângulo tem muitas aplicações práticas. Ela explica a presença dos triângulos nas estruturas, de madeira ou ferro das construções.

Explica também a travessa usada nos portões.



tesoura de telhado



portão com travessa

Enfim, este material simples permite explorar muitas ideias interessantes. Ele pode ser usado no trabalho de sala de aula ou nas feiras de ciências.

Uma interpretação geométrica do MMC

Mário Lúcio Cardoso

Otânio Alves Gonçalves

A atividade proposta é interessante para o aluno "visualizar" o MMC. Pode ser apresentada sem dizer ao aluno que se trata do MMC, deixando que ele mesmo faça a descoberta e se pergunte porque o método funciona.

Após a leitura do artigo do professor *Zelci Clasen de Oliveira*, na **RPM** 29, sobre uma interpretação geométrica do MDC, ficamos pensando sobre a possibilidade de uma interpretação geométrica também para o MMC.

Após algumas tentativas encontramos uma maneira de achar o MMC de dois números naturais m e n, sem efetuar operações e utilizando apenas a contagem. O método é o seguinte:

1) Tomemos um retângulo $ABCD$ de lados m e n. O retângulo deverá estar subdividido em quadrados unitários.

2) Partindo de um dos vértices do retângulo, traçamos as diagonais dos quadrados unitários observando a seguinte ordem:

   a) traçamos a diagonal do quadrado que tem o vértice coincidente com o vértice escolhido do retângulo.

   b) traçamos, a partir do vértice no qual paramos, as diagonais dos quadrados que têm um ângulo oposto pelo vértice com o quadrado anterior ou, na ausência desse quadrado, traçamos a diagonal do quadrado ao lado e a partir do vértice onde paramos.

   c) As diagonais dos quadrados unitários devem ser traçadas até que se chegue a um dos outros vértices do retângulo $ABCD$.

d) Contamos quantos quadrados tiveram suas diagonais traçadas. O número encontrado é o MMC de m e n.

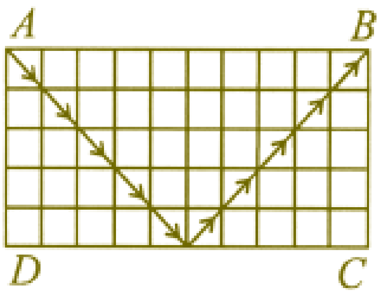
Exemplos:

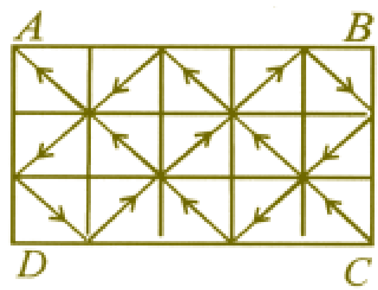
• MMC de 5 e 10 (iniciando, por exemplo, em A).

Observe que 10 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.

• MMC de 3 e 5 (iniciando, por exemplo, em C).

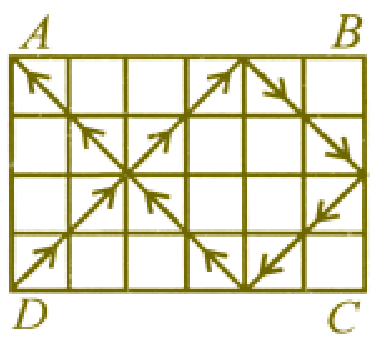
Observe que 15 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.





• MMC de 4 e 6 (iniciando, por exemplo, em D).

Observe que 12 quadrados tiveram suas diagonais traçadas.



O método se baseia nos fatos: ao partirmos de um vértice do retângulo e chegarmos a um outro vértice desse mesmo retângulo, traçamos diagonais de um número de quadrados que corresponde a um múltiplo tanto de m quanto de n; parando no primeiro outro vértice do retângulo $ABCD$, estamos determinando o mínimo dentre os múltiplos comuns de m e n.

Como obter o MDC e o MMC sem fazer contas?

Marcelo Polezzi

A atividade é interessante para o aluno "visualizar" o MDC e o MMC. Pode ser apresentadas sem dizer ao aluno que se trata de MDC e MMC, deixando que ele mesmo faça a descoberta e se pergunte porque o método funciona.

Há algum tempo atrás tive a oportunidade de ler dois artigos interessantes na **RPM**, os quais tratam de encontrar métodos geométricos para calcular o MDC e o MMC entre dois números. Fiquei entusiamado e percebi que poderia produzir um novo método, espantosamente simples, que permitisse obter, quase ao mesmo tempo, o MDC e o MMC.

O método baseia-se essencialmente em um artigo que publiquei, que traz uma fórmula explícita para o MDC e o MMC entre dois números. Meu objetivo agora é mostrar como se obtém o MDC e o MMC, usando apenas contagem.

O método

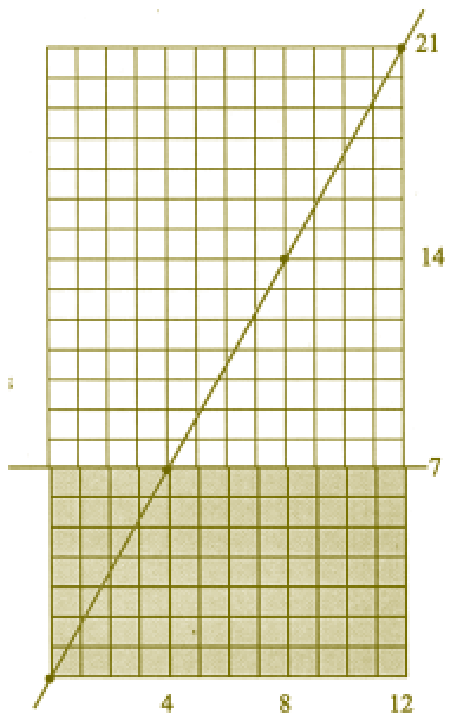
1. Considere um retângulo de lados, com medidas inteiras a e b, dividido em quadradinhos unitários.
2. Trace uma das diagonais do retângulo, marcando-a nos pontos que são vértices de algum quadradinho unitário.
3. Conte em quantas partes esses pontos dividem a diagonal: esse número $\boldsymbol{d}$ é o MDC(a,b).
4. Trace linhas verticais (horizontais), passando por cada um dos pontos que você marcou, unindo dois lados opostos do retângulo. Conte o número de quadradinhos unitários existentes

em qualquer um dos ***d*** retângulos determinados por essas linhas verticais (horizontais): esse número ***m*** é o MMC(a,b).

A figura a seguir ilustra o procedimento para $a = 12$ e $b = 21$.

A diagonal está dividida em três partes iguais, logo, 3 = MDC(12, 21).

O número de quadradinhos existentes em qualquer um dos três retângulos é 7×12, logo 84 = MMC(12, 21).

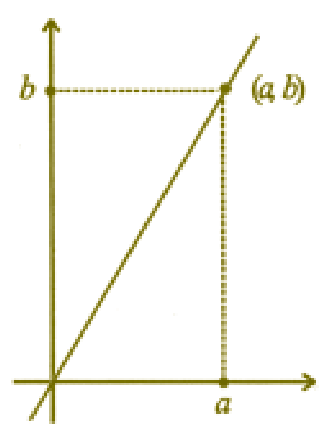


Justificativa

Se d = MDC (a,b), existem inteiros u e v tais que $a = du$ e $b = dv$, com u e v primos entre si.

Considerando um sistema de eixos ortogonais com a origem num dos vértices do retângulo, como na figura, a equação da reta que contém a diagonal considerada é

$$y = \frac{b}{a}x.$$



Logo, pertencem à diagonal os pontos (0, 0); (u,v) pois

$$\frac{b}{a} = \frac{v}{u} \quad ; (2u,\ 2v);\ ...;$$

(du, dv) = (a, b), ou seja, $d + 1$ pontos de coordenadas inteiras, igualmente espaçados.

Para verificar que são apenas esses os pontos da diagonal com coordenadas inteiras, suponha que (p, q) pertença à diagonal e tenha coordenadas inteiras. Então,

$$q = \frac{b}{a}p = \frac{v}{u}p \ ,$$

o que implica $qu = vp$ e, sendo MDC(u, v) = 1, vem que $q = rv$ e $p = ru$, com $0 \leq r \leq d$.

Logo, a diagonal fica dividida em ***d*** pedaços iguais.

Como os $d + 1$ pontos são igualmente espaçados, os d retângulos obtidos no item **4** têm a mesma área ***m***. Logo, ***md* = *ab***, o que mostra que m = MMC(a, b), e m é também o número de quadradinhos contido nos retângulos.

Observação

Se o interesse for calcular apenas o MMC, basta traçar uma linha vertical, passando pelo ponto descrito no item **2** que seja o mais próximo do vértice superior atingido pela diagonal e contar os quadradinhos existentes no menor retângulo determinado por essa linha vertical.

Raiz quadrada sem contas ou calculadora

José Luiz Pastore Mello

O artefato proposto aqui é bastante simples e interessante. Os alunos podem construí-lo em uma sala de aula como parte da atividade. Pode ser apresentado ao estudante que já conhece a noção de raiz quadrada ou pode servir como motivador dessa definição. Uma vez que a atividade de "extrair a raiz quadrada", utilizando o artefato esteja dominada, é natural a pergunta como o artefato funciona?

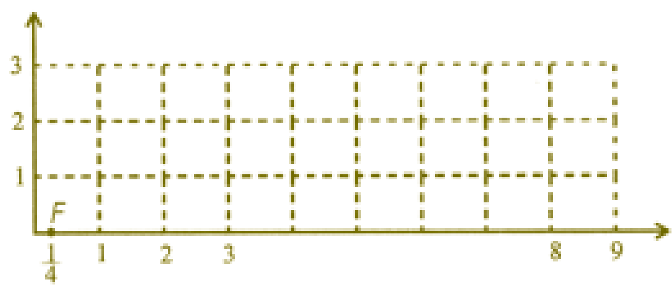
Tudo está baseado no Teorema de Pitágoras e, com um pouquinho de estímulo, o aluno pode tentar descobrir isso sozinho.

Introdução

Vamos construir, usando papel milimetrado, papel transparente, régua e compasso, calculadoras para o cálculo de raiz quadrada. Apresentaremos também justificativas para seu funcionamento.

Construção

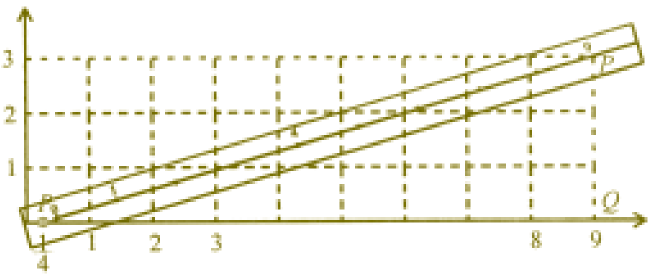
1. Marque numa folha de papel milimetrado dois eixos ortogonais e uma unidade de medida.



Considerando que os valores do eixo das ordenadas nos darão o resultado da raiz quadrada, deve-se escolher a escala de acordo com os objetivos do cálculo e da precisão desejada.

Numa folha de papel transparente desenhe uma linha reta graduada usando a mesma unidade usada no sistema de eixos e faça um furo a uma distância de ¼ à esquerda do zero.

Fixe o furo no ponto $F = (1/4, 0)$ marcado no sistema de eixos ortogonais. A calculadora para estração de raiz quadrada está pronta!



Escolha um número no papel transparente, por exemplo o 9, e seja P o ponto correspondente a esse número. Gire a reta no sentido anti-horário, até que a abcissa de P seja igual ao número escolhido, 9: a ordenada de P será a raiz quadrada do número, no caso o número 3.

Você sabe por que o artefato funciona? Um modo de justificar é:

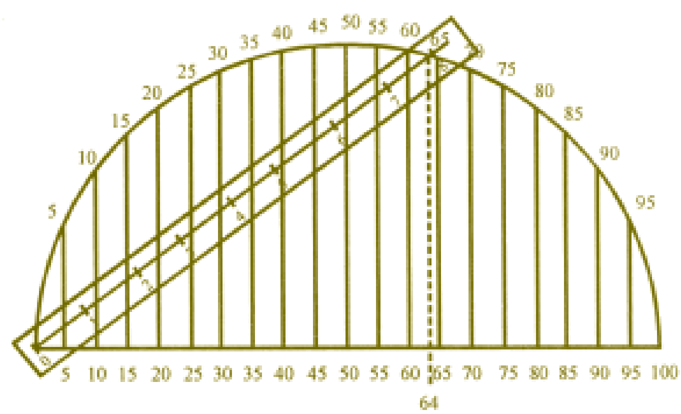
Pelo teorema de Pitágoras no triângulo ΔFPQ, $(1/4, 0)$, $Q = (n, 0)$, $P = (n, y_n)$ obtemos a igualdade

$$\left(n+\frac{1}{4}\right)^2 = y_n^2 + \left(n-\frac{1}{4}\right)^2,$$

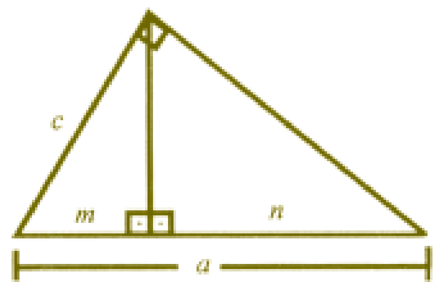
que implica $y_n^2 = n$ ou $y_n = \sqrt{n}$.

2. Um outro mecanismo para extração de raiz quadrada pode ser construído do seguinte modo:

Desenhe em papel milimetrado uma reta horizontal graduada de 0 a 100, que será o diâmetro de uma circunferência de raio 50. Trace linhas verticais de cada ponto da gradação até a circunferência. Desenhe numa tira de papel transparente uma reta graduada com escala 10 vezes maior que a utilizada no papel milimetrado e fixe a origem da tira na origem do sistema, no papel milimetrado.



O mecanismo está pronto. Para calcular a raiz quadrada de um número indicado na reta horizontal, basta girar a tira de papel transparente até o ponto da circunferência que encontra a vertical que passa pelo número escolhido. A raiz quadrada do número estará indicada na tira de papel transparente, no ponto de encontro com a circunferência.



A explicação do funcionamento pode ser feita usando-se uma das relações métricas do triângulo retângulo: $c^2 = am$ ou $c = \sqrt{am}$. No nosso caso, como $a = 100$, c seria igual a 10 vezes a raiz quadrada do número m, o que é corrigido pela escolha da escala na tira de papel transparente.

Nomogramas (calculadoras de papel)

Marcelo Escudeiro Hernandes

Um computador de papel! Existe?

Um computador de papel? Esta atividade, além de exercitar os alunos na construção de gráficos e marcação de pontos no plano, permite efetuar geometricamente adição ou multiplicação de dois números.
Tanto a Álgebra como a Geometria podem ser utilizadas para mostrar por que o método funciona.
A atividade, que pode ser explorada até no ensino médio com equações de retas, pode ser desenvolvida no ensino fundamental, trabalhando medidas no trapézio, cálculo da hipotenusa de um triângulo retângulo etc.

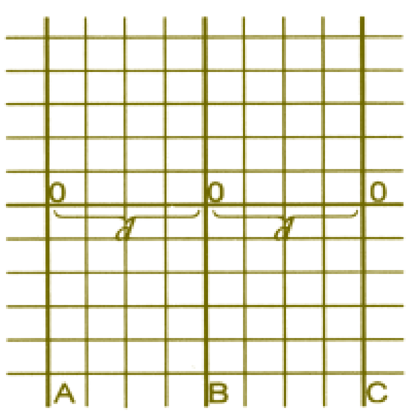
Introdução

Facilitar cálculos sempre incentivou a pesquisa e construção de máquinas ou métodos que diminuíssem os esforços e permitissem maior rapidez e exatidão em operações. Assim foi com o ábaco, as barras de Napier, réguas de cálculo, ... até os computadores de hoje.

Entre esses métodos estão os chamados ***nomogramas***, que são tipos de gráficos em que o resultado de operações é encontrado, utilizando uma régua ou qualquer outro instrumento que permita o traçado de um segmento de reta.

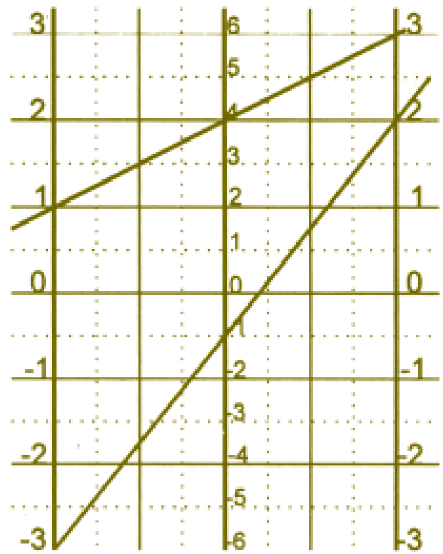
Existem nomogramas para operações elementares como adição, multiplicação, médias, hipotenusa de um triângulo retângulo, e outros.

Adição



Vejamos o exemplo de um nomograma simples para adição de dois números reais.

Tome três eixos *A*, *B*, *C*, paralelos, eqüidistantes e perpendiculares a uma reta *r* dada. Seja *d* a distância entre eles. Graduamos os eixos com uma mesma unidade e marcamos 0 nos três eixos numa mesma horizontal. Nos eixos *A* e *C*, marcamos o número *n* (ou –*n)* a *n* unidades da origem. No eixo *B*, marcamos 2*n* (ou –2*n*) a *n* unidades da origem. Veja a figura a seguir.



Para determinar a soma de dois números a e c, marcamos a no eixo ***A*** e c no eixo ***C***. A soma $a + c$ será determinada pela interseção da reta que une os pontos a e c com o eixo ***B***.

Veja os exemplos:

$$1 + 3 = 4$$

$$-3 + 2 = -1$$

$$-1 + (-1) = -2$$

Por que isso funciona? A explicação é bem simples e pode tomar dois enfoques distintos, um algébrico e outro geométrico. Vejamos, inicialmente, o apelo algébrico:

Suponha que queremos encontrar a soma de dois números reais a e c. Consideremos a reta que passa pela origem dos três eixos como sendo o eixo x, e o eixo ***B*** como sendo o eixo y.

Assim, a reta que liga a com c é a reta que passa pelos pontos $(-d, a)$ e (d, c). Sua equação é:

$$y - a = \frac{c - a}{2d}(x + d).$$

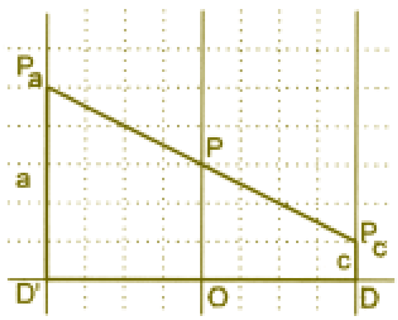
A interseção dessa reta com o eixo y é o ponto $(0, \frac{a + c}{2})$.

Ou seja, a interseção nos dará a média aritmética de a e c. No eixo ***B***, a e c.

No eixo B, a $\dfrac{a+c}{2}$ unidades da origem, está marcado o número $a + c$.

Claramente, pode-se encontrar também a diferença de dois números e e f, usando essa mesma construção. Basta marcar e no eixo $\boldsymbol{B}$, f no eixo $\boldsymbol{A}$, e ler a diferença d no eixo $\boldsymbol{C}$, dada pela interseção desse eixo com a reta que passa por e e f. De fato, teríamos $f + d = e$, donde, $d = e - f$.

Para a argumentação geométrica, chamemos os pontos correspondentes aos números a e c de P_a e P_c. Observemos que há apenas três posições distintas para esses pontos:

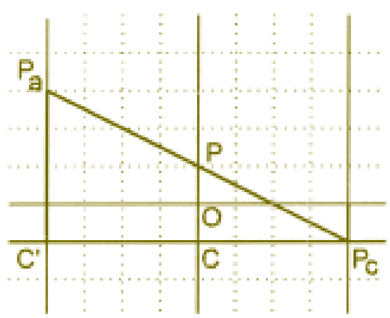


a) P_a e P_c estão no mesmo semiplano determinado pelo eixo x.

OP é a base média do trapézio P_aP_cDD' e, portanto, mede $\dfrac{a+c}{2}$

O número que aparece na posição P é o dobro desse, isto é, $a + c$.

b) P_a e P_c estão em semiplanos distintos em relação ao eixo x.



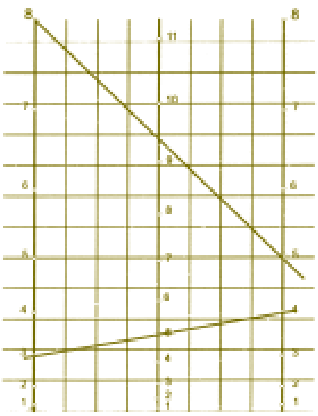
CP é a base média do triângulo $P_aC'P_c$.

Portanto, $CP = \dfrac{a+(-c)}{2}$ e $OP = \dfrac{a+(-c)}{2} - (-c) = \dfrac{a+c}{2}$.

c) Um argumento semelhante aos anteriores pode ser usado se um dos pontos, P_a ou P_c, estiver no eixo x.

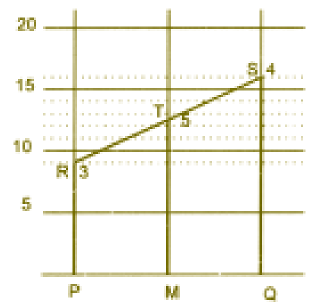
Cálculo da Hipotenusa

Vejamos a construção de um nomograma que fornece a hipotenusa de um triângulo retângulo se fo- rem dados os catetos.



Como $(\text{hip})^2 = (\text{cat}_1)^2 + (\text{cat}_2)^2$, precisamos realizar uma adição e, portanto, podemos tomar o modelo já visto. Mas, como queremos somar quadrados de números, dessa vez nos eixos *A* e *C* escrevemos o número n a n^2 unidades da origem e no eixo *B* escrevemos o número n a $n^2/2$ unidades da origem.

Aos catetos 3 e 4 corresponde a hipotenusa 5, e aos catetos 8 e 5 corresponde a hipotenusa ≈ 9,4



Detalhando *PR* tem 9 unidades a *R* corresponde o número 3.

QS tem 16 unidades, a *S* corresponde o número 4.

MT tem 25/5 = 12,5 unidades, a *T* corresponde o número 5.

Multiplicação

Para a multiplicação de dois números positivos pode-se usar novamente o mesmo tipo de nomograma, lembrando que, se $x \cdot y = z$ então $\log x + \log y = \log z$, qualquer que seja a base do sistema de logaritmos. Nesse caso, para marcar os números nos eixos *A* e *C*, fixamos a origem em cada eixo e marcamos o número n a uma distância igual a $\log n$ unidades dessa origem. No eixo *B* marcamos o número n a uma distância igual a $1/2 \log n$ unidades da origem. Uma figura, praticamente igual à de cima, mostrará por que tal nomograma funciona.

NOTA HISTÓRICA

(de autoria de
José Paulo Carneiro)

Gráficos como os apresentados neste artigo, ou nomogramas, destinam-se a calcular valores de funções ou resolver equações, por meio do traçado apenas de **retas**. Embora seus princípios básicos estejam implícitos em diversos instrumentos imaginados na antiguidade para resolver problemas isolados, o estudo sistemático de nomogramas surgiu em 1885, com *C. Lallemand* e principalmente com *Maurice d'Ocagne*, que criou o termo "Nomografia" (M. d'Ocagne, *Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques*, Paris, 1891). Nos livros de língua inglesa, os nomogramas são conhecidos também como *allignement charts*. Até menos de meio século atrás, o estudo dos métodos da Nomografia (assim como do uso da "régua de cálculo", baseada em princípios semelhantes) fazia parte de um curso padrão de Cálculo Numérico, nos cursos técnicos das Universidades. Embora superados, em termos práticos, pelos computadores, os nomogramas constituem ainda instrumentos interessantes do ponto de vista didático. O leitor interessado pode consultar, por exemplo, o livro de J. Lipka, *Graphical and Mechanical Computation*, New York, 1918.

Artesanato e Matemática

Luiz Márcio Imenes

Nesta atividade o autor *Luiz Márcio Imenes* novamente nos presenteia com muita Geometria ,utilizando madeira, pregos e linha. Além de oferecer um resultado final muito bonito que servirá para decorar salas e corredores da escola, o autor propõe o jogo da construção das diagonais de um polígono, no qual certas regras deverão ser obedecidas. Com isso estuda-se o número de diagonais de um polígono, quantas partem de cada vértice, etc. Os alunos perceberão que sem método e matemática a construção fica muito mais difícil, senão impossível.

Como foi que aconteceu

Há uns dez anos, um aluno, cujo nome infelizmente não recordo, apareceu na escola com algumas peças de seu artesanato. Trabalhando com madeira, pregos e linhas de várias cores, ele compunha paisagens, figuras humanas e motivos geométricos. Lembro-me de um Cristo na Cruz, que me impressionou bastante. Foi a primeira vez que vi esse tipo de artesanato. Depois disso vi muitos outros trabalhos na mesma linha (sem trocadilho!).

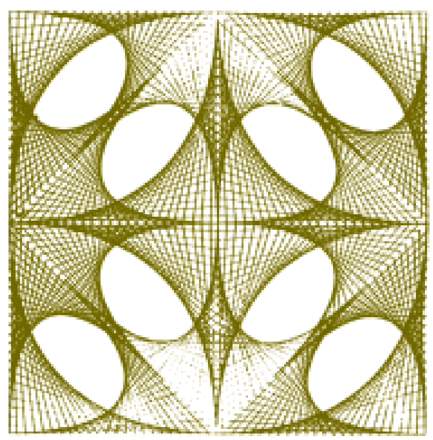


Figura 1

Certo dia, folheando um livro, vi o desenho de um decágono regular e suas 35 diagonais:

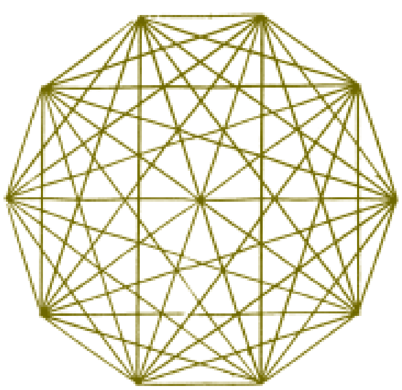


Figura 2

A Figura, que parece um bordado, me trouxe à lembrança o artesanato de meu ex-aluno. As duas coisas cruzaram-se, e veio a idéia de juntar o artesanato com a Matemática. Antes de fazer a proposta aos alunos, resolvi brincar um pouco. E aí tive a companhia dos filhos. Brincando, fui descobrindo coisas interessantes. Trabalhando com os alunos, foram aparecendo idéias mais interessantes ainda. Apresentei essas idéias a diversos colegas professores, em diferentes cursos, e eles contribuíram com novos problemas, novas situações e novas idéias. Esse relato tem portanto muitos autores. Posteriormente vim a descobrir que não há nada de original nessas idéias. Elas são apresentadas em publicações antigas e já foram exploradas por muitas outras pessoas.

Entretanto, a ausência de originalidade, em nada diminuiu o prazer da descoberta (ou re-descoberta).

O Jogo das diagonais

Tenho proposto essa atividade aos alunos na forma de um jogo. Apresento-a também como uma atividade artesanal envolvida com a Matemática.

Os materiais necessários são: um pedaço de madeira, de forma quadrada, com aproximadamente 30 cm de lado; de 15 a 24 pregos com cabeça, de comprimento aproximado 15 mm; um rolo de linha colorida para construir as diagonais; e uns 3 m de linha de outra cor para representar os lados do polígono. Convém usar uma linha resistente. São necessários ainda um martelo e instrumentos de desenho: compasso, transferidor e régua.

O primeiro passo é desenhar sobre a tábua um polígono regular de n lados. É preciso que, numa mesma classe, apareçam polígonos com diferentes números de lados. Para isso estipulo que, para cada aluno: $n = 15 +$ algarismo das unidades do dia do seu aniversário. (Por exemplo, para os alunos que aniversariam nos dias 7, 17 ou 27 temos $n = 15 + 7 = 22$). Com esse critério resulta: $15 \leq n \leq 24$ e, em geral, numa classe com cerca de 30 alunos, temos 10 polígonos diferentes. Essa variedade é importante, como você perceberá mais adiante.

Para desenhar o polígono o aluno começa desenhando uma circunferência com aproximadamente 10 cm de raio. A seguir divide-a em n partes iguais, desenhando ângulos centrais de medida $360^o/n$. Quando o quociente $360^o/n$ não é inteiro, fazemos aproximações. Se, por exemplo, $n = 23$ resulta $360^o/23 \cong (15{,}6)^o$ Ou arredondamos esse valor para 15^o30 min, ou desenhamos um ângulo central com 15º e o outro com 16º, alternadamente. Pequenas aproximações não prejudicam a estética des-se artesanato.

Tendo dividido a circunferência em n partes iguais, nos pontos de divisão, o aluno fixa os pregos. É importante que esses fiquem bem firmes. Se depois um deles se soltar, o trabalho estará perdido.

O passo seguinte é construir, com a linha, as diagonais do polígono. Nesse momento apresento as quatro regras do jogo.

1ª *Regra:* é preciso construir *todas* as diagonais do polígono. Se ficar faltando alguma, não valeu.

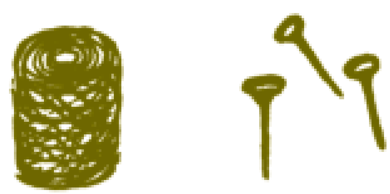
2ª *Regra:* lado não é diagonal e por isso, quando estiver construindo as diagonais, não é permitido passar a linha de um prego para um de seus vizinhos.

3ª *Regra:* não vale construir a mesma diagonal duas vezes, isto é, não vale ir e vir pelo mesmo caminho.

4ª *Regra:* também não vale, num dado momento, amarrar a linha num prego, cortá-la, amarrá-la novamente em outro prego, e prosseguir com o trabalho.

A linha só pode ser cortada quando a última diagonal tiver sido construída.

Agora, mãos à obra. Amarre a linha num prego qualquer e comece. Antes de prosseguir a leitura desse artigo você não gostaria de executar essas idéias? Posso lhe garantir que vale a pena!



Algumas observações:

1. Dependendo das circunstâncias, peço aos alunos que preparem, em casa, a tábua com o polígono regular desenhado sobre ela e os pregos já fixados também. Com isso, evita-se uma barulheira danada!

2. Essas idéias podem ser trabalhadas só com material de desenho, sem a madeira, os pregos, a linha e o martelo. Isso facilita as coisas por um lado, mas cria algumas dificuldades, como veremos logo mais. Além disso, sem pregos e linha, desaparece o artesanato...

O procedimento dos alunos

Passo a relatar algumas das observações que faço, quando os alunos iniciam a construção das diagonais com a linha.

Alguns se põem a construí-la sem um critério definido. Puxam a linha de um prego a outro qualquer e deste a um outro, caoticamente, sem qualquer preocupação com rotina, lei de formação, ou tática de construção. Logo percebem que assim não dá. São muitas diagonais e daí a pouco estão perdidos, sem saber o que já está feito e o que falta fazer. Desmancham tudo e começam novamente.

Outros alunos, desde o início, preocupam-se em fazer as construções, seguindo alguma regra, alguma lei de formação. Alguns optam por esgotar as diagonais que partem de um certo vértice e também acabam desistindo.

No fim de pouco tempo, a maioria dos alunos chega à seguinte regra de construção: partindo de um primeiro prego (aquele em que ele amarrou a linha) e caminhando sempre num mesmo sentido, constrói-se a menor diagonal, que não foi construída ainda. Assim por exemplo, se $n = 18$, passa-se a linha de um prego a outro, nessa seqüência: 1–3–5–7–9–11–13–15–17–1, e estamos de volta ao prego 1. Como a diagonal 1–3 já está construída, vai-se de 1 a 4. Em 4, a menor diagonal ainda não construída é 4 – 6. A seqüência agora, então é: 4–6–8–10–12–14–16–18–2–4.

Com as construções realizadas, todas as diagonais menores desse polígono estão prontas. Essas diagonais menores são obtidas, pulando-se um só vértice.

Prosseguindo, a seqüência é: 4–7–10–13–16–1–5–8–11– etc.

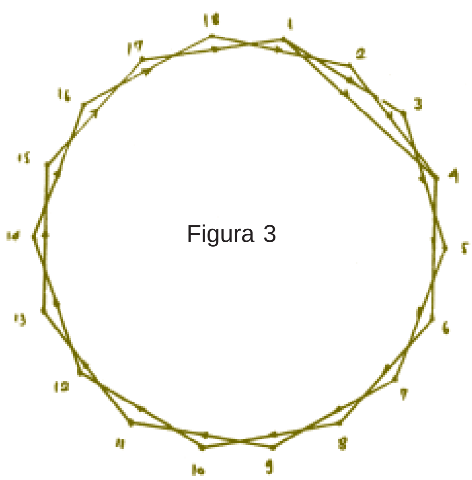


Figura 3

Mais algumas observações

3. A tática que estamos apresentando não é exclusiva. É possível construir as diagonais do polígono por outros caminhos. Entretanto, razões estéticas recomendam a construção descrita. O bordado resultante apresentará um bonito relevo.

4. Nesse processo todo, é importante poder errar, voltar atrás, tentar outro caminho, poder desmanchar e começar de novo. É bem menos trabalhoso fazer isso com a linha do que desenhando: Se necessário, leia novamente a observação 2.

5. É preciso estar atento, percorrendo a classe. Alguns alunos se esquecem das regras do jogo e passam pela mesma diagonal duas vezes, ou ligam um prego a seu vizinho.

Alguns terminam, outros chegam a um beco sem saída

Uma das regras do jogo estabelece que *todas* as diagonais precisam ser construídas. Inevitavelmente aparece a pergunta:

– Professor, como sei que já fiz todas?

– Descubra um jeito!

Espontaneamente ou, quando necessário, conduzidos pelo professor, a maior parte dos alunos acaba percebendo que, se por exemplo, $n = 20$, de cada prego devem partir 17 diagonais. Nem sempre generalizam esse resultado com facilidade, concluindo que o número de diagonais que partem de cada vértice é igual a $n – 3$. Mas, devagar, chegam a essa conclusão.

Depois de algum tempo, alguns alunos comunicam que completaram o trabalho, enquanto outros reclamam porque não conseguem completar a obra. Chegam a um prego e não têm como continuar: todas as $n – 3$ diagonais que partem dele estão construídas, e ainda existem diagonais a serem construídas! Voltam atrás, desmancham parte do trabalho, seguem por outro caminho e, não demora muito, estão novamente num beco sem saída.

Por quê?

Criado o clima, faço um levantamento da situação, perguntando o número de lados que tem o polígono de cada um dos que conseguiram terminar e o daqueles que não estão conseguindo. No primeiro grupo aparecem 19, 23, 15 etc., e, no segundo, 20, 22, 16 etc. Às vezes nem é preciso dirigir muito. Alguns percebem essas coisas sozinhos e a notícia corre pela classe.

Nesse ponto é natural que todos se perguntem: por que é que se n é ímpar a brincadeira dá certo, e quando par, não?

Custa um pouco para que todos entendam o que está acontecendo, mas devagar, e com ajuda do professor, chegam lá.

Se n é par, o número de diagonais que partem de cada vértice, que é $n – 3$, é ímpar. Vamos pensar assim: quando nos dirigimos a um determinado prego, pela primeira vez, chegamos e partimos, construindo 2 diagonais. Quando voltamos a ele, construímos mais 2 (já são 4 diagonais). E assim por diante, o número de diagonais construídas vai aumentando de 2 em 2 : 6, 8, 10, etc. Como $n – 3$ é ímpar, haverá um momento em que só uma diagonal estará faltando. Quando voltarmos a esse prego, a última diagonal será construída, sem que se possa sair dele, respeitando as regras do jogo. E não adianta desmanchar e procurar outro caminho. Em algum prego isso acontecerá necessariamente.

Moral da história: *o jogo proposto e impossível quando* n *é par!*

Veja bem: o *jogo* é impossível, o artesanato, não.

Desrespeitando uma das regras do jogo, é possível completar a construção das diagonais. Pode-se, por exemplo, amarrar a linha no prego, dar o nó, cortá-la, amarrá-la num outro e prosseguir, até que nova impossibilidade apareça. Repete-se o processo até construir todas as diagonais.

Para finalizar o trabalho, com o outro fio de linha, os alunos constroem os lados do polígono regular.

O artesanato terminou, mas a Matemática envolvida nele mal começou!

Porém, antes de propor novos problemas, vale a pena explorar um pouco mais o que já foi feito.

Quando n é ímpar, o número de diagonais que partem de cada vértice é par. Desaparece então a impossibilidade verificada quando n é par. Vamos fixar atenção no prego em que amarramos a linha para começar a construção. Na seqüência, o número de diagonais construídas, que partem dele, é: 1, 3, 5, 7 etc. É só no vértice de partida que isto acontece. Nos demais, a seqüência é: 2, 4, 6, 8 etc. Isso permite concluir que a última diagonal deve terminar justamente onde começou a primeira! É gostoso ver nos alunos, para os quais n é ímpar, a reação a essa conclusão:

— É mesmo, isso aconteceu com o meu trabalho!

Número de diagonais do polígono

Durante esse processo, os alunos perceberam que o número de diagonais que partem de cada vértice é igual a $n - 3$. Pergunto a eles:

— Quantas diagonais tem o seu polígono?

Cada um faz as contas para o seu caso particular. Nem todos percebem a necessidade da divisão por 2: ao multiplicarem n por $n - 3$, contaram cada diagonal duas vezes.

Para que percebam o erro, basta sugerir que façam o mesmo raciocínio para um quadrado ou pentágono. Enfim, raciocinando com base na atividade desenvolvida, errando, percebendo contradições, acabam chegando ao resultado geral:

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

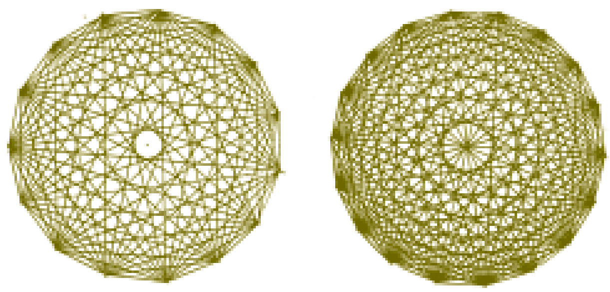
onde d é o número de diagonais do polígono.

Na construção que fizeram, com prego e linha, desenharam um polígono regular (razões estéticas!). Vale a pena perguntar:

A fórmula obtida vale para um polígono convexo não regular?

Novos problemas

Peço aos alunos que observem os diferentes trabalhos. Em alguns deles, no centro da figura aparece uma "rodelinha", um núcleo vazio. Em outras isso não ocorre. Qual a explicação, por que isto acontece?



Logo percebem que, quando n é par existem vértices simétricos em relação ao centro e por isso algumas diagonais são diâmetros, passam pelo centro. Quando n é ímpar, nenhuma diagonal é diâmetro. Daí a "rodelinha".

Outros problemas: quando n é par quantas são as diagonais que passam pelo centro? Quando n é ímpar, quantas são as diagonais mais próximas do centro?

As respostas, que são respectivamente, $n/2$ e n, aparecem com alguma facilidade.

Agora uma outra questão um pouco mais exigente: isso que estamos chamando de "rodelinha", é, na verdade, um polígono. Demonstre que ele é regular e tem também n lados.

E mais problemas

O artesanato construído pelos alunos é uma arte de linhas retas, e entretanto vemos ali uma série de "circunferências" concêntricas. Observe bem as duas últimas figuras. Na verdade essas "circunferências" são polígonos regulares com muitos lados. Mas podemos pensar nas circunferências inscritas nesses polígonos. A simples observação dos bordados dá a impressão de que o espaçamento entre essas circunferências é constante. Com outras palavras, a sensação visual é de que os raios dessas circunferências parecem formar uma progressão aritmética. Será isto verdadeiro?

Como você vê, soltando a imaginação, a gente vai longe...

Como já disse, essa é uma arte de linhas retas. Quantos segmentos de reta há em cada um daqueles trabalhos? Dois modos de exprimir a resposta:

$$d+n=\frac{n(n-3)}{2}+n \text{ ou então } C_{n,2}.$$

Quantos triângulos podemos visualizar naquele emaranhado de linhas? E quantos quadriláteros, pentágonos, etc.? E quantos polígonos podem ser vistos ali?

Mais algumas observações

6. Como você vê, o tema é rico, podendo ser explorado em diferentes níveis, com diferentes graus de profundidade. Tenho trabalhado com ele no ensino médio. Outros colegas o exploram no ensino fundamental: é preciso apenas alguma sensibilidade para perceber até onde é possível avançar.

7. Aqui foram propostos alguns problemas Outros ainda poderiam ser apresentados, dentro do mesmo tema. Gostaríamos entretanto, que os colegas leitores da Revista nos escrevessem, propondo outros problemas, motivados a partir do artesanato aqui construído. Pensem ainda em outras ligações desse tema com outros campos da Matemática.

Para que serve a Matemática, professor?

Em 1982, quando nascia a Revista do Professor de Matemática, na Seção "Para que serve", preocupada em apresentar as aplicações da Matemática, escrevemos o seguinte:

"...vivemos num mundo extremamente utilitarista, onde as coisas têm sempre que servir a um fim material específico. No entanto, o homem continua gostando de fazer certas coisas que não têm utilidade imediata, no sentido utilitarista do termo. A arte é um exemplo disto."

Às vezes, na Matemática, estudamos certos assuntos, resolvemos certos problemas, simplesmente com a intenção de vencer desafios, brincar com a Matemática, divertir-nos com ela. Esta dimensão também deve ser mostrada ao aluno: é possível sentir prazer, brincando com a Matemática".

Penso que o artesanato construído com pregos e linha, e os problemas criados a partir dele, revelam com bastante força a fecundidade de um casamento entre Matemática e Arte!

Caleidociclos

Ingo Valter Schreiner

A construção de caleidociclos é interessante do ponto de vista artístico e leva ao estudo de Geometria Plana e Espacial.

Para alunos do ensino fundamental, além da parte lúdica e criativa, é possível trabalhar com ângulos, triângulos, áreas e medidas.

Num curso sobre o ensino de Geometria nos ensino fundamental e médio, realizado em Panambi – RS, em setembro de 1984, o professor *Luiz Márcio P. Imenes* mostrou aos participantes dois caleidociclos. Não conhecia esse material, que me fascinou tanto do ponto de vista geométrico como do ponto de vista artístico. Os dois caleidociclos eram decorados com motivos de Maurits C. Escher (1898-1972), um artista gráfico dos Países Baixos. Ao girar os caleidociclos de dentro para fora ou de fora para dentro, apresentam-se ao espectador ciclos de figuras diferentes.

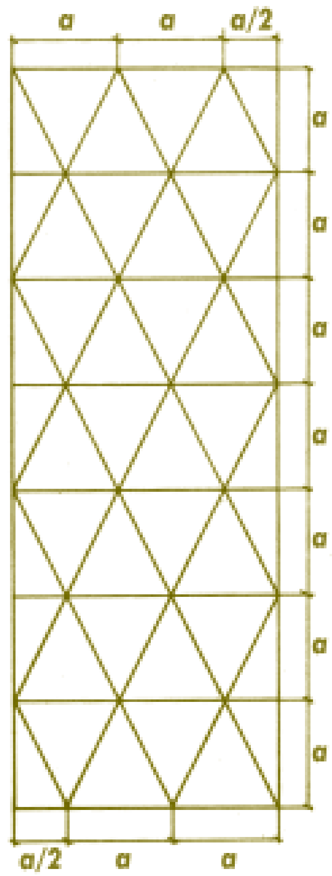
A compreensão do funcionamento e a construção desses caleidociclos podem ser usadas como aplicações interessantes e divertidas da Geometria Espacial.

A construção de um caleidociclo

Para acompanhar este artigo, monte um caleidociclo, observando as instruções a seguir:

1) Material necessário: régua, esquadro, tesoura, lápis, borracha, cola e cartolina (ou qualquer papel um pouco mais grosso que o comum).

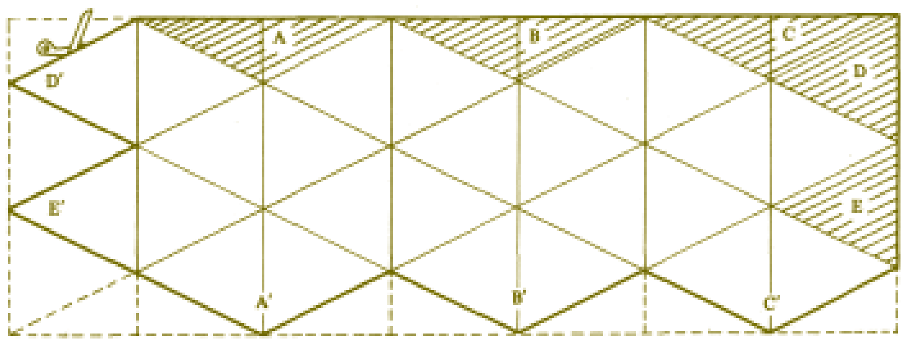
2) Sobre a cartolina desenhe esta malha de triângulos:



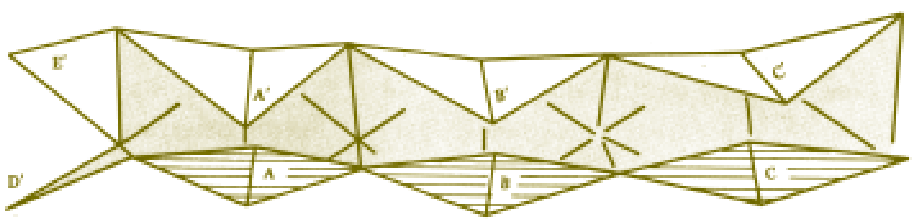
Nesta construção a precisão é importante. Observe que, com exceção de alguns, os triângulos da malha são isósceles, de base a, e altura relativa à base é a também. Os demais triângulos são retângulos, tendo catetos iguais a a e $a/2$.

O valor de *a* depende do pedaço de cartolina disponível. Não convém, por razões práticas, fazer *a* menor do que 4 cm.

3) Recorte segundo a linha de traço forte.



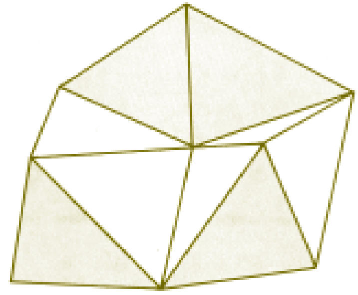
4) Nas linhas de traço fino você fará dobraduras. Nas linhas verticais dobre o desenho para dentro e nas inclinadas dobre para fora. Um detalhe prático: antes de dobrar convém vincar a cartolina. Isto pode ser feito com a régua e uma faca sem ponta.



5) Após as dobraduras, a parte hachurada do desenho receberá cola, ficando, por isso, dentro do caleidociclo. Cole *A'* sobre *A*, *B'* sobre *B* e *C'* sobre *C*.

Assim procedendo você obtém um conjunto de seis tetraedros em cadeira. Eles se ligam por uma aresta comum.

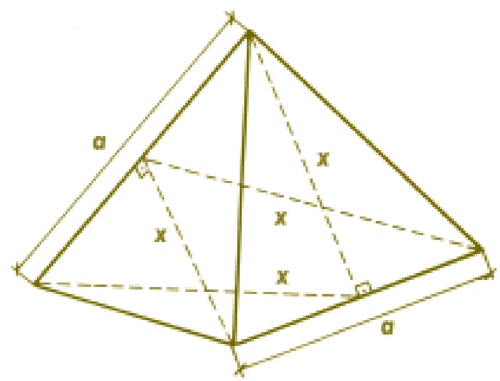
6) Agora forme um elo, articulando o primeiro tetraedro com o último. Cole *D'* sobre *D* e *E'* sobre *E*. Está pronto o seu caleidociclo. Espere a cola secar antes de brincar com ele.



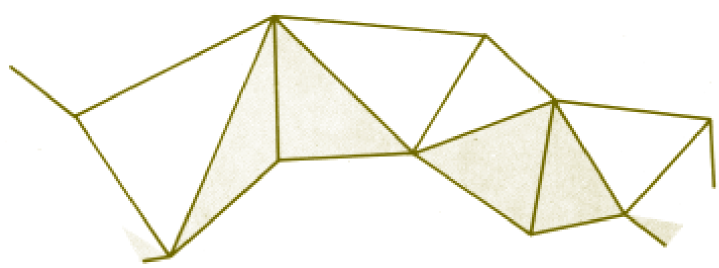
4 Faces, 4 Giros

O caleidociclo que você construiu é composto de seis tetraedros. Mas é possível construir outros, com maior número de tetraedros. De um modo geral, um caleidociclo é formado por um número par $2k$ de tetraedros, sendo que $k \in \{3, 4, 5, ...\}$. No seu caleidociclo $k = 3$.

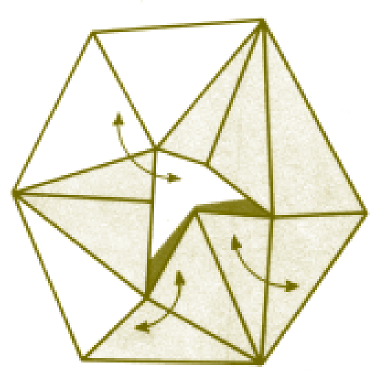
Tais tetraedros são congruentes e suas faces são triângulos isósceles congruentes, de base a e altura relativa à base x.



Os $2k$ tetraedros têm, dois a dois, uma aresta de medida a em comum.



Com esta cadeia, como você viu, formamos um ciclo fechado. Podemos girar este ciclo num sentido ou noutro, como mostram as setas duplas.

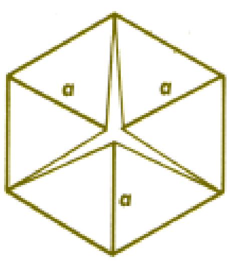


Girando aparece um “buraco” estrelado no centro do caleidociclo. Em certo momento este buraco desaparece. Nesse instante tetraedros vizinhos têm suas faces superpostas. Nessa posição, note que o “contorno” de seu caleidociclo é um hexágono regular. Observe ainda que, nessa posição, você está vendo uma face de cada um dos seis tetraedros. Girando, reaparece o “buraco” estrelado, até que, novamente, ele desaparece. Nessa nova posição revelam-se outras seis faces dos tetraedros.

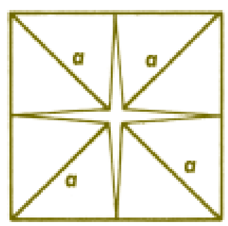
Faça uma marca numa destas faces e gire o caleidociclo. Perceberá que ela reaparece depois de quatro giros.

A relação entre *a* e *x*

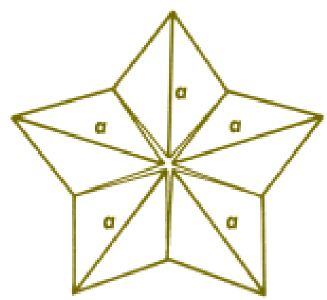
Na posição em que o “buraco” desaparece, a metade das arestas de medida a está contida num mesmo plano π. As arestas restantes, que têm esta medida, são perpendiculares a P. Nesta posição, podemos definir o contorno do caleidociclo como sendo sua intersecção com o plano π. Este contorno é um polígono regular convexo quando $k = 3$ ou $k = 4$, e um polígono regular estrelado quando $k \geq 5$. É no centro deste polígono que, nesta posição, coincidem alguns vértices dos tetraedros.



$k = 3$



$k = 4$



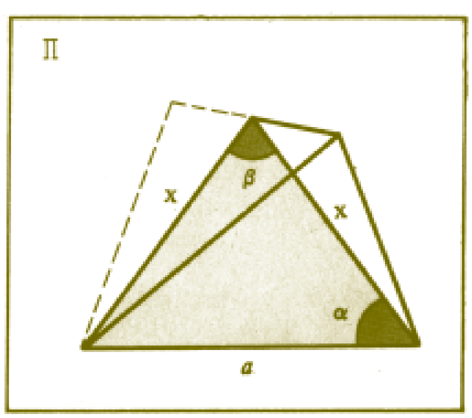
$k = 5$

A intersecção do plano P com cada tetraedro é um triângulo isósceles de lados a, x e x.

Como o número de tetraedros é $2k$ resulta:

$$\alpha = \frac{360^\circ}{2k} = \frac{180^\circ}{k}$$

$$\beta = 180^\circ - 2\alpha = 180^\circ - \frac{360^\circ}{k}.$$



Fica óbvio nesse momento porque k deve ser maior do que 2. Usando a lei dos cossenos no triângulo acima, temos: $a^2 = x^2 + x^2 - 2.x.x.\cos\beta$, donde:

$$a = x\sqrt{2 - 2\cos\beta}$$

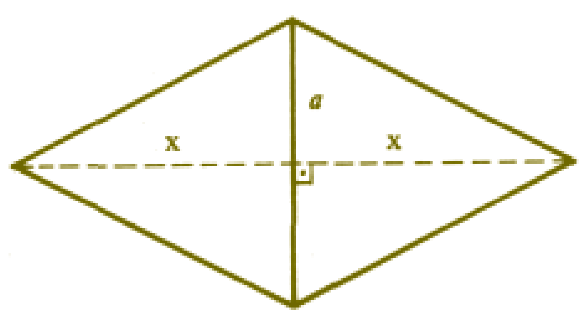
Esta expressão permite calcular a, em função de x, para qualquer caleidociclo constituído de $2k$ tetraedros, com $k \in \{3, 4, 5, ...\}$.

Na tabela seguinte apresento os valores de α, β e a (em função de x), para $k = 3, 4, 5, 6$.

k	3	4	5	6
$2k$	6	8	10	12
α	60º	45º	36º	30º
β	60º	90º	108º	120º
a	x	$x\sqrt{2}$	$\cong 1{,}62x$	$x\sqrt{3}$

A planificação

Num caleidociclo o número de faces triangulares é igual a $4 \times 2k = 8k$. Como as arestas de medida a são comuns a dois tetraedros, podemos pensar assim: juntando dois triângulos isósceles iguais pelas suas bases, obtemos um losango (onde uma diagonal é a; a outra é $2x$).



Portanto a planificação da caleidociclo é constituída de $4k$ losangos de diagonais a e $2x$. Os lados comuns destes losangos serão as outras arestas (diferentes de a) dos tetraedros.

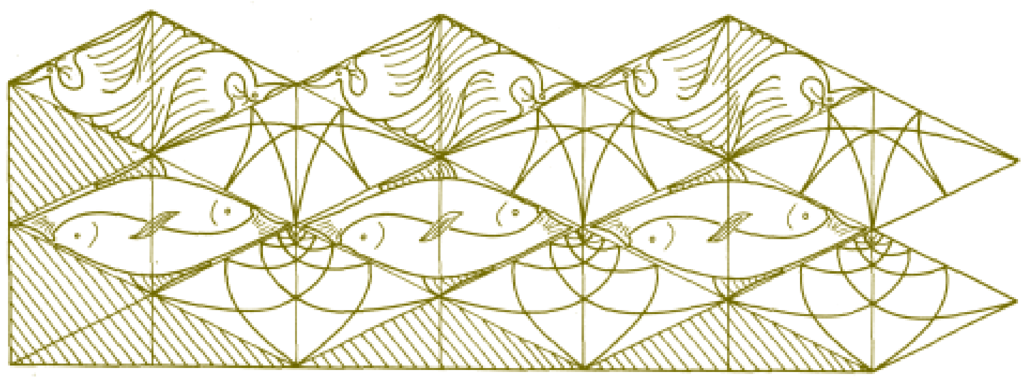
Na construção do caleidociclo não esqueça de deixar as partes que receberão cola. Outro detalhe prático: levando em conta a espessura da cartolina, é aconselhável tomar a ligeiramente menor que

$$a = x\sqrt{2 - 2\cos\ \beta}$$

(aproximadamente 2%).

Enfeitando fica mais bonito

Como escrevi no início deste artigo, os primeiros caleidociclos que vi, eram decorados com motivos do artista Maurits C. Escher. Se quiser enfeitar o seu, poderá pintar cada faixa de losangos com motivos e cores diferentes. Girando o caleidociclo, de cada vez aparecerá um desenho diferente.



Resolvendo fisicamente

Ana Catarina P. Hellmeister

Maria Elisa E. L. Galvão

As atividades apresentadas podem ser aplicadas na 6ª série, na modelagem de resolução de equações de 1º grau, usando peças coloridas de cartolina ou papel craft.
Na 5ª série pode ser usada na modelagem das operações algébricas.
Na 8ª série pode ser utilizada na modelagem e "visualização" da fatoração dos trinômios do segundo grau. Além de motivar o estudo dos conteúdos mencionados, as atividades propostas desenvolvem a criatividade e o questionamento na busca de soluções para problemas.

Introdução

O objetivo deste artigo é relatar nossa experiência de trabalho com professores de Matemática do Ensino Fundamental II da rede pública, envolvidos no Programa de Educação Continuada (PEC), um projeto conjunto da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e da Universidade de São Paulo – USP, além de nossa experiência em oficinas do Centro de Ensino de Matemática da USP.

A aceitação e o envolvimento dos professores participantes, e a decisão de aplicação do material concreto na sala de aula nos estimularam a divulgar mais amplamente o trabalho.

O objetivo das atividades propostas é, inicialmente, a modelagem, com o uso de peças coloridas de cartolina, de expressões algébricas do primeiro e segundo graus. A seguir, usa-se esse material para modelar a resolução de equações do primeiro grau e a fatoração de trinômios do segundo grau.

Uma observação deve sempre ser feita quando se trabalha com material concreto: O professor precisa estar atento quanto à necessidade dos alunos em usá-lo, pois, para aqueles que não necessitam de atividades com esse material para compreensão do processo algébrico, a insistência pode ser desmotivadora.

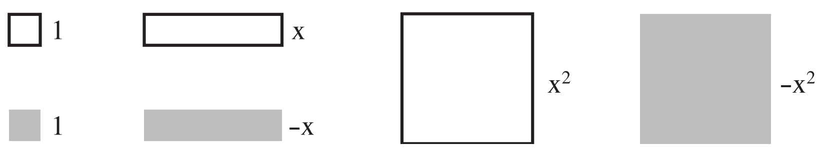
Material utilizado

Um conjunto de fichas de cartolina em duas cores (que representaremos aqui em branco e cinza), constituído por:

Quadrados pequenos (1 × 1) – que representarão a unidade **1**. Os quadrados brancos representarão as unidades positivas, e os cinza, as unidades negativas.

Retângulos – com um dos lados com a mesma medida **1** dos quadrados pequenos e o outro lado com uma medida qualquer, que não seja um múltiplo inteiro da unidade escolhida. Os retângulos brancos corresponderão à incógnita x e os cinza, ao seu oposto $-x$.

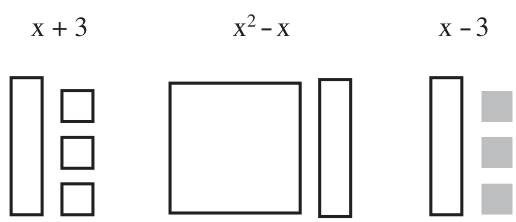
Quadrados grandes – cujos lados devem ter a mesma medida escolhida para o lado não unitário do retângulo anterior; também em duas cores, o branco representando x^2 e o cinza o seu oposto $-x^2$.



Para as atividades propostas neste artigo, é necessário que os alunos dominem as operações com números inteiros, de preferência com representação concreta, de modo análogo ao aqui utilizado.

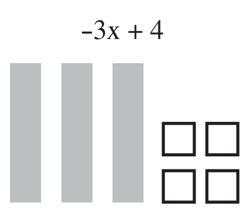
Atividade 1

Trabalhamos inicialmente com a modelagem para expressões algébricas, ou seja, vamos escolher o conjunto de peças que representará cada uma dessas expressões, como nos exemplos a seguir:

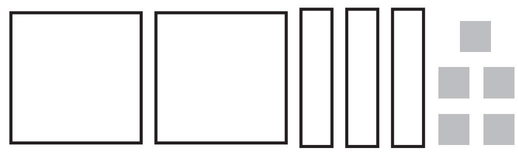


Podemos efetuar **adição**

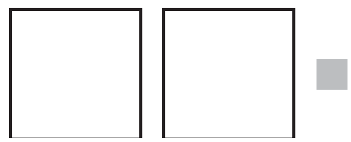
$(-3x + 4) + (2x^2 + 3x - 5)$, observando que as peças de cores diferentes representam quantidades opostas e “se anulam” aos pares.



$2x^2 + 3x - 5$



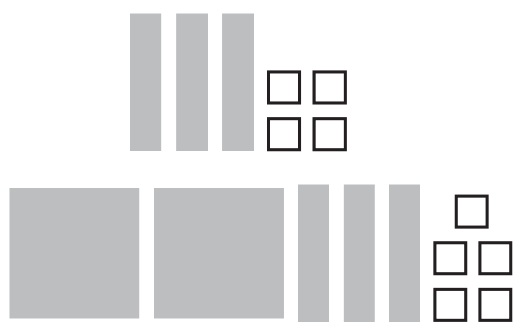
O resultado, portanto, será $2x^2 - 1$:



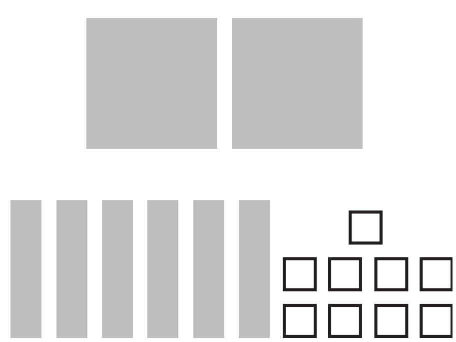
Para efetuar a **diferença**

$(-3x + 4) - (2x^2 + 3x - 5)$, uma das formas de trabalhar pode ser somando a expressão oposta, ou seja, usando que

$$(-3x + 4) + (2x^2 + 3x - 5) = (-3x + 4) + + (-2x^2 - 3x + 5),$$

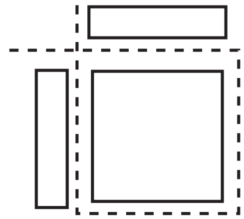


e teremos $(-3x + 4) - (2x^2 + 3x - 5) = -2x^2 - 6x + 9$:

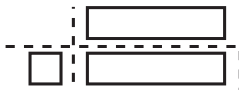


Podemos também modelar as várias possibilidades para o **produto**, usando as representações:

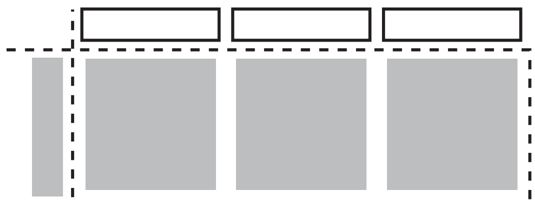
$x \times x = x^2$



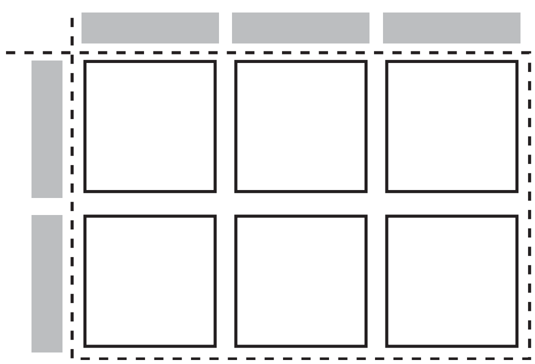
$1 \times x = x$



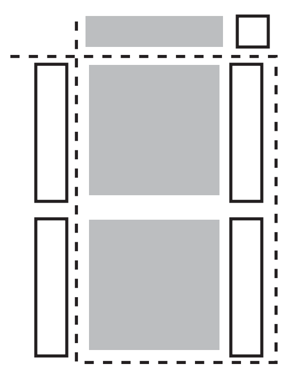
$(-x) \times 3x = -3x^2$



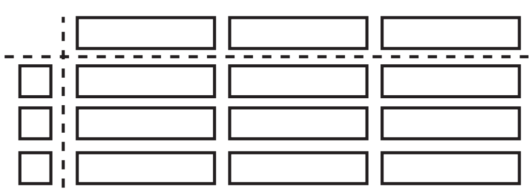
$(-2x) \times (-3x) = 6x^2$



$(2x) \times (-x + 1) = -2x^2 + 2x$



$3 \times 3x = 9x$



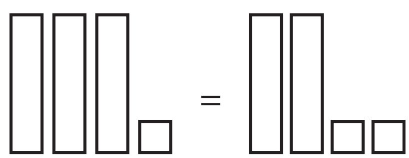
Atividade 2

Usando a propriedade *uma igualdade se mantém se efetuamos operações iguais em ambos os lados*, modelamos a solução de uma equação do 1º grau, como nos exemplos abaixo.

É importante que cada operação efetuada em ambos os lados da igualdade seja acompanhada de sua representação simbólica para que, após muitos exemplos, o estudante participante apreenda as propriedades usadas e se liberte do material concreto, passando a resolver as equações algebricamente. Vários professores que aplicaram a atividade em sala de aula relatam que, de fato, é isso que acontece.

Exemplo 1.

$$3x + 1 = 2x + 2$$

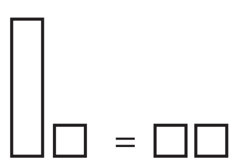


• Substituir cada tira branca por 2 quadradinhos brancos e verificar se existe igualdade. A negação significa que $x = 2$ não é a solução da equação.

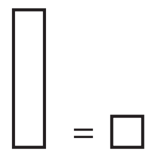
• Voltando à representação original, retirar duas tiras brancas de cada lado, mantendo, portanto, a igualdade e obtendo:

$$3x + 1 - 2x = 2x + 2 - 2x \text{ ou}$$

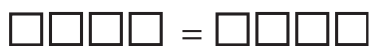
$$x + 1 = 2.$$



• Retirar um quadradinho branco de cada lado obtendo $x = 1$, que é a solução da equação.



• Voltar à configuração inicial e substituir cada tira branca por um quadradinho branco e verificar a igualdade.



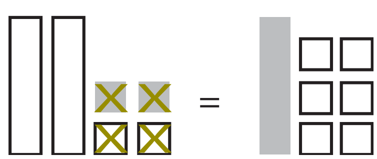
Exemplo 2.

$$2x - 2 = -x + 4$$

• Acrescentar duas unidades positivas em cada lado, mantendo, portanto, a igualdade e obtendo:

$$2x - 2 + 2 = -x + 4 + 2 \text{ ou}$$

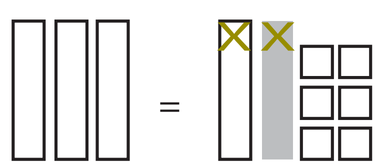
$$2x = -x + 6.$$



• Acrescentar uma tira branca em cada lado, obtendo:

$2x + x = -x + 6 + x$ ou $3x = 6$ ou

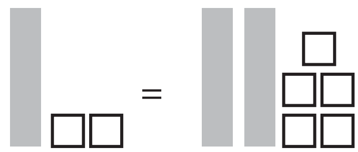
$x = 2$, que é então a solução.



Voltar à configuração inicial e substituir cada tira branca (cinza) por dois quadradinhos brancos (cinza) e verificar a igualdade.

Exemplo 3.

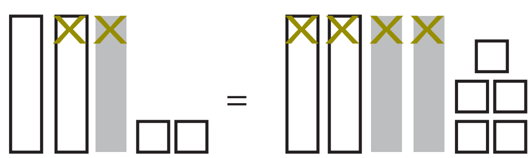
$$2 - x = 5 - 2x$$



• Acrescentar 2 tiras brancas em cada lado, obtendo:

$$2 - x + 2x = 5 - 2x + 2x \text{ ou}$$

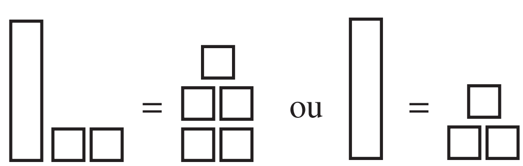
$$2 + x = 5$$



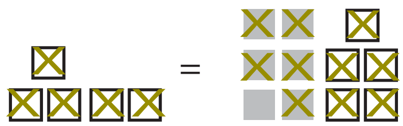
• Retirar 2 quadradinhos brancos de cada lado, obtendo:

$$2 + x - 2 = 5 - 2 \text{ ou}$$

$x = 3$, que é a solução.



• Voltar à configuração inicial e substituir as tiras, representando $-x$ por 3 quadradinhos cinza (por quê?) e verificar a igualdade.



Sugerimos ao leitor que resolva, modelando como nos exemplos, outras equações do 1º grau cujas soluções são números inteiros.

Atividade 3

Nesta atividade, observando um modelo físico, os participantes podem investigar a fatoração de um trinômio do 2º grau $ax^2 + bx + c$, com a, b e c inteiros cuja decomposição resulta em uma expressão do tipo $(ax + p)(x + q)$ com p e q inteiros. O objetivo é levar à percepção das propriedades que permitam fatorar tais expressões no nível simbólico.

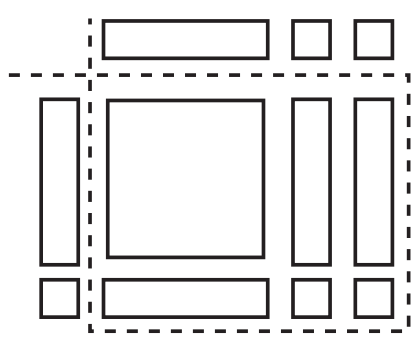
Para realizar a atividade, estabelecemos o seguinte:

Um trinômio do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c$ com a, b *e* c *inteiros e* $a > 0$ *pode ser fatorado se, e somente se, for possível formar um retângulo com as peças que o representam. As dimensões do retângulo formado representam os fatores do trinômio.*

Dessa forma, voltamos à estrutura do produto modelado nos exemplos 1, 2 e 3 da Atividade 1.

Por exemplo, os fatores de $x^2 + 3x + 2$ podem ser encontrados construindo-se um retângulo com uma peça que representa x^2, três peças que representam x e duas peças que representam as unidades positivas.

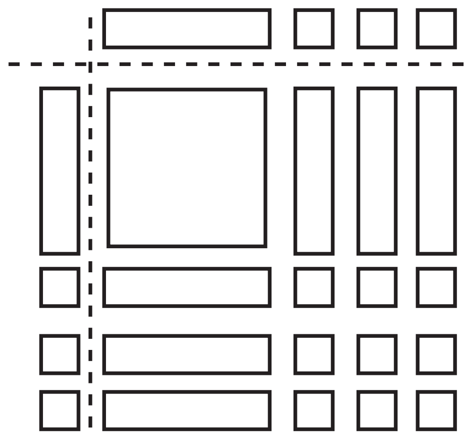
$$x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$$



Vejamos mais alguns exemplos:

1. O trinômio $x^2 + 6x + 9$ pode ser fatorado construindo-se o quadrado ao lado. Observe que trinômios quadrados perfeitos podem sempre ser representados por peças que formam um quadrado. Logo,

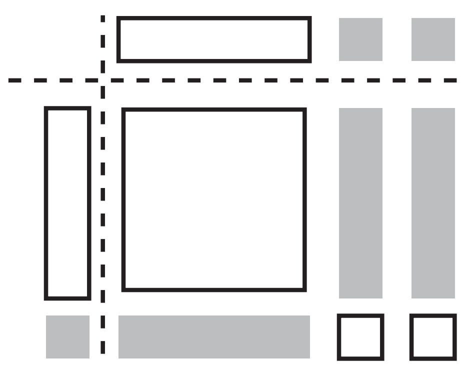
   $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$.



2. O trinômio $x^2 - 3x + 2$ pode ser fatorado, construindo-se o retângulo:

   Logo,

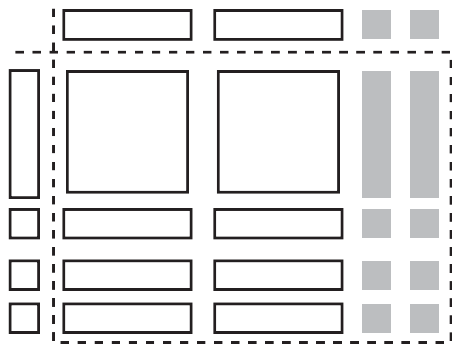
$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2).$$



3. $2x^2 + 4x - 6 = (2x - 2)(x + 3)$.

No próximo exemplo usamos, para formar o retângulo, a convenção de que peças de cores diferentes se "anulam": $4x$ foi representado por $6x + (-2)$.

Depois de muitos exemplos, os alunos que participam da atividade devem estar aptos para responder à questão:



Se $ax^2 + bx + c = (ax + p)(x + q)$, quais as relações que existem entre os números p, q e c ? E p, q e b?

Em seguida devem usar essas relações para fatorar algebricamente outros trinômios e estarão prontos para resolver equações do segundo grau, usando a fatoração para recair em equações do primeiro grau.

Por exemplo, para resolver a equação $2x^2 + 4x - 6 = 0$ (exemplo 3), fazemos $2x^2 + 4x - 6 = (2x - 2(x+ 3)) = 0$ e então $2x - 2 = 0$ ou $x + 3 = 0$; logo, $x = 1$ ou $x = -3$.

Varetas, canudos, arestas e... Sólidos geométricos

Ana Maria Kaleff

Dulce Monteiro Rei

Usando canudinhos coloridos e barbante é possível construir sólidos geométricos que levam alunos, desde a 6ª série, a visualizar propriedades, a se concentrar numa tarefa, a criar imagens e a intuir soluções de problemas.

A imagem concreta de sólidos, polígonos e arestas facilita o entendimento e é essencial para o estudo futuro da Geometria Plana e Espacial.

As dificuldades apresentadas pelos alunos na visualização de sólidos geométricos e a desmotivação que muitos estudantes apresentam nas aulas de Geometria Espacial têm levado os educadores a buscarem meios para facilitar o ensino das propriedades geométricas dos sólidos e para tornar esse ensino mais atrativo e motivador.

Na nossa prática escolar temos utilizado materiais concretos para a construção de estruturas que representam “esqueletos” de sólidos geométricos construídos por meio de suas arestas. Os materiais de nossa preferência para as construções são pedaços de canudos de plástico, unidos por meio de um fio de linha e varetas finas de madeira unidas por anéis elásticos.

Sugerimos a utilização de canudos plásticos de refrigerantes, em três cores (ou diâmetros) diferentes, um carretel de linha um pouco mais grossa do que a linha usada para empinar pipas, palitos “para churrasco”, anéis elásticos, e uma agulha grossa. Nos esquemas que seguem, indicaremos por $\rightarrow$ o sentido em que a linha deve ser inserida num canudo vazio e indicaremos por $\Rightarrow$ o sentido em que ela dever ser inserida num canudo já ocupado por algum pedaço de linha.

Atividade 1

Construção de um tetraedro regular

O material a ser utilizado na atividade a seguir é um metro de linha, seis pedaços de canudo de mesma cor e comprimento (sugerimos 8 centímetros).

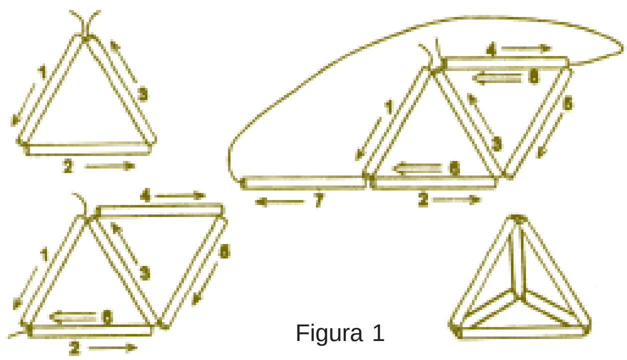


Figura 1

Tome o fio de linha, passe-o através de três pedaços de canudo, construindo um triângulo e feche-o por meio de um nó. Agora, passe o restante de linha por mais dois pedaços de canudo, juntando-o e formando mais um triângulo com um dos lados do primeiro triângulo. Finalmente, passe a linha por um dos lados desse triângulo e pelo pedaço que ainda resta, fechando a estrutura com um nó. Essa estrutura representa as arestas de um tetraedro regular, e as etapas intermediárias de sua construção estão representadas na Figura 1.

Temos observado que alguns mais habilidosos, ao fazerem essa construção, não dão o nó indicado para a obtenção do primeiro triângulo, utilizando o pedaço de linha sem interrupções para a construções do esqueleto do tetraedro. Isso demonstra que tais alunos perceberam que os nós, apesar de facilitarem a construção, podem ser evitados.

Nas construções das estruturas é importante observar que, para se dar firmeza aos vértices de uma estrutura, é necessário reforçá-los, passando o fio de linha mais de uma vez por cada pedaço de canudo, ligando-o aos outros dois. O esquema apresentado na Figura 2 ilustra essa situação.

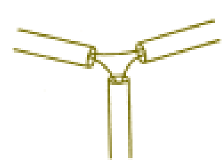


Figura 2

Atividade 2

Construção de um octaedro regular

Para essa atividade, são necessários dois metros de linha, doze pedaços de canudo de mesma cor e comprimento (novamente sugerimos a medida de 8 centímetros).

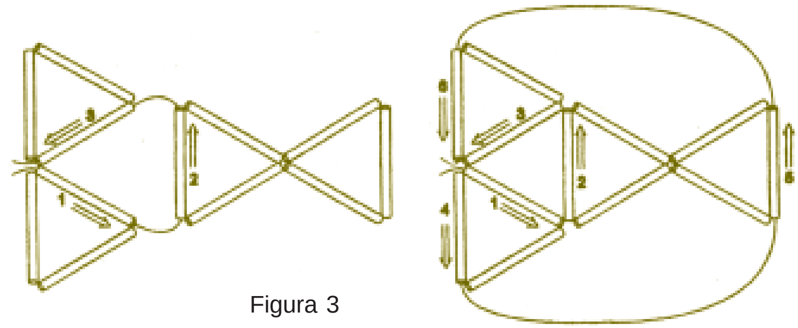


Figura 3

Com pedaços de canudos e o fio de linha, construa quatro triângulos e os una, dois a dois, conforme o esquema apresentado na Figura 3.

Atividade 3

Construção de um icosaedro regular

Para essa atividade, são necessários três metros de linha, trinta pedaços de canudo de mesma cor e comprimento (sugerimos a medida de 7 centímetros).

Construa quatro triângulos, seguindo o esquema da figura 4 e os una obtendo uma pirâmide regular de base pentagonal, como a desenhada na figura. Repita essa construção, obtendo mais uma pirâmide. Una cada uma das pirâmides através dos vértices das bases, por meio de pedaços de canudos, de tal forma que em cada vértice se encontrem cinco canudos.

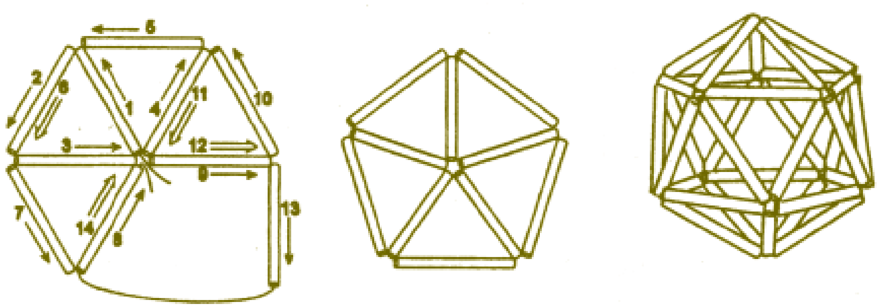


Figura 4

Atividade 4

Construção de um cubo e de suas diagonais

Serão necessários doze pedaços de canudo da mesma cor e medindo 8 cm, seis canudos de outra cor ou de diâmetro menor do que o anterior, e mais um canudo de cor diferente das demais.

Com pedaços de canudo da mesma cor construa um cubo de 8 cm de aresta. Para isso, passe o fio através de quatro canudos e passe a linha novamente por dentro do primeiro canudo, construindo um quadrado. Considerando um dos lados desse quadrado e passando a linha por mais três canudos, construa mais um quadrado. Observe que ainda faltam dois canudos para completar as arestas do cubo. Prenda-os de maneira a completá-lo. Se você não conseguir realizar essa tarefa, observe o esquema da Figura 5.

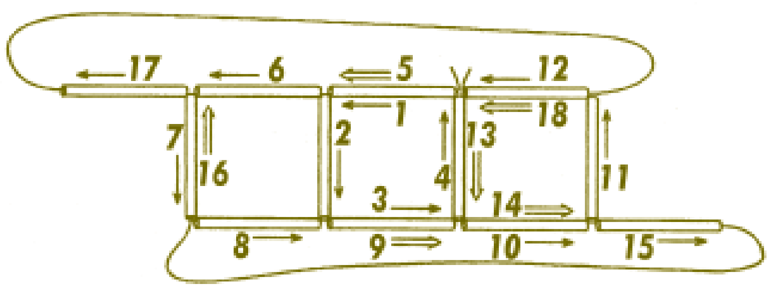


Figura 5

Os alunos observarão que a estrutura construída não tem rigidez própria, pois os seus lados não ficam por si sós perpendiculares à superfície da mesa. Então é necessário que os levemos a conjecturar em como tornar essa estrutura rígida. Nesse processo, notamos que os alunos observam que, se construirmos triângulos nas faces dessa estrutura ou no seu interior, ela se enrijecerá. Dando continuidade a esse raciocínio, sugerimos ao aluno a tarefa seguinte:

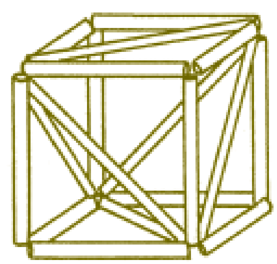


Figura 6

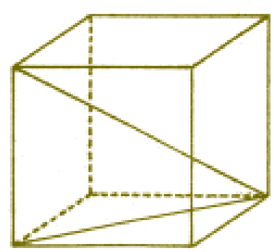


Figura 7

Agora, com pedaços de canudo de cor (ou diâmetro) diferente da usada para representar as arestas do cubo, construa uma diagonal em cada face, de modo que em cada vértice que determina a diagonal cheguem mais duas diagonais. Que estrutura você construiu?

Observe a Figura 6. Assim procedendo, o aluno construirá um tetraedro formado por seis diagonais das faces do cubo.

A seguir, com um pedaço de canudo de cor diferente das anteriores, construa uma diagonal do cubo.

Devemos levar o aluno a observar que essa diagonal formará com uma das arestas do cubo e com uma das diagonais da face, um triângulo retângulo. Essa construção é muito útil para ilustrar aplicações do Teorema de Pitágoras, pois a maioria dos alunos têm problemas para visualizar situações como essa.

Temos verificado que os alunos percebem que, após as atividades anteriores, já construíram quatro dos cinco poliedros regulares de Platão (ver **RPM** 15, p. 42) e a questão se é possível construir o dodecaedro pode surgir naturalmente. Apesar de ser uma tarefa trabalhosa, os alunos se propõem a construir essa estrutura, porém, preferencialmente, em grupo e não como uma tarefa individual.

O problema dos cinco discos: sorte ou sabedoria?

Ma-To Fu
Roberto Elias

> Essa atividade pode ser proposta a alunos de todos os níveis. O que está em evidência aqui é o raciocínio. Como resolver um problema? Nossa sugestão é explorar todas as possibilidades de distribuição dos discos, fazer experiências em sala de aula, talvez uma competição... Após familiarizar os alunos com o problema, é o momento de organizar a informação: analisar soluções propostas pelos alunos, encontrar "furos", encontrar a solução mais eficiente...

Neste artigo queremos mostrar uma curiosidade sobre o antigo problema dos cinco discos. A mais bela apresentação desse problema se encontra em *O homem que calculava*. Nele é contada uma lenda em que três príncipes muito sábios e conhecedores da Matemática pretendiam casar com a princesa Dahizé, filha do rei Cassim.

A prova dos cinco discos foi proposta por um grande sábio da corte para decidir qual dos três pretendentes era o mais inteligente.

Foram mostrados aos príncipes cinco discos, sendo dois pretos e três brancos, todos de mesmo peso e tamanho. Em seguida vendaram-lhes os olhos e, ao acaso, foi pendurado às costas de cada um dos três um disco. Disse o rei: "Cada um de vós será interrogado particularmente e aquele que descobrir a cor do disco que lhe coube por sorte, será declarado o vencedor. O primeiro a ser interrogado poderá ver os discos dos outros dois, ao segundo será permitido ver o disco do terceiro, e o terceiro terá que formular a resposta sem ver nada. Aquele que der a resposta certa terá que justificá-la".

Aconteceu então que o príncipe Camozã quis ser o primeiro. Viu os dois discos dos seus adversários e errou. Em seguida, sabendo que Camozã havia errado, o príncipe Benefir se prontificou em ser o segundo, mas também errou. Aradim, o terceiro príncipe, acertou com absoluta segurança. Qual foi a resposta do príncipe Aradim e como ele descobriu?

Esse é o problema dos cinco discos. *Malba Tahan* dá uma inteligente solução a esse problema, em que conclui também que Aradim foi considerado o mais inteligente entre os três príncipes.

Eis a solução de Malba Tahan: o príncipe Aradim afirmou que o seu disco era branco e justificou da seguinte maneira: “Se Camozã (o primeiro a falar) tivesse visto dois discos pretos, ele obviamente teria acertado. Como ele errou, conclui-se que viu dois discos brancos, ou um preto e um branco. Na hipótese de Benefir ter visto em minhas costas um disco preto, ele (usando o mesmo raciocínio que fiz com relação a Camozã) teria acertado. Logo, ele só pode ter visto um disco branco e, portanto, o meu disco é branco”.

A curiosidade que pretendemos apresentar é que, sob o ponto de vista matemático, Aradim não é mais inteligente que Camozã ou Benefir. Com efeito, basta calcularmos as probabilidades de acerto de cada um dos três príncipes, levando em conta que todos eles são sábios.

As possíveis distribuições dos discos

Sejam b = (disco branco) e p = (disco preto). Por simplicidade escrevemos

X = Camozã,

Y = Benefir e

Z = Aradim

Então a ordem em que os príncipes se apresentaram para serem interrogados pode ser representada por uma terna ordenada (X, Y, Z).

A título de exemplo, perguntamos quantas maneiras diferentes podem X possuir disco branco, Y possuir disco preto e Z possuir disco preto? Isto é, de ocorrer (b, p, p).

Sabemos que existem três discos brancos b_1, b_2 e b_3 e dois discos pretos p_1 e p_2. Por uma simples contagem, obtemos seis maneiras diferentes de ocorrer (b, p, p), a saber:

$$(b_1, p_1, p_2),\ (b_1, p_2, p_1),\ (b_2, p_1, p_2),\ (b_2, p_2, p_1),\ (b_3, p_1, p_2)$$

e

$$(b_3, p_2, p_1).$$

É claro que o número total de maneiras em que podem ser distribuídos os discos aos príncipes é $A_{5,3} = 60$. Descrevendo esses casos, obtemos:

Eventos	**Frequência**	**Eventos**	**Frequência**
$E_1 = (b,\ b\ ,b)$	6	$E_5 = (p,\ p\ ,b)$	6
$E_2 = (p,\ b\ ,b)$	12	$E_6 = (p,\ b\ ,p)$	6
$E_3 = (b,\ p\ ,b)$	12	$E_7 = (b,\ p\ ,p)$	6
$E_4 = (b,\ b\ ,p)$	12		

Lembretes:

a) Se os conjuntos unitários de um espaço amostral finito U têm todos a mesma probabilidade, então a probabilidade de um evento A qualquer de U será dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)},$$

onde $n(A)$ é o número de elementos do evento A e $n(U)$ é o número total de elementos do espaço amostral U.

b) Nas mesmas condições de a), se A_1 A_2, ..., A_n são eventos disjuntos entre si,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \frac{n(A_1) + n(A_2) + \ldots + n(A_n)}{n(U)}$$

Como o problema afirma que a escolha dos discos é feita ao acaso, segue-se que o espaço amostral associado ao problema satisfaz as condições necessárias para a validade de a) e b). Não é difícil verificar também que o problema admite uma estratégia que maximiza a probabilidade de vitória de cada concorrente e garante, com probabilidade 1, a existência de um vencedor, que certamente será único uma vez que o processo termina no momento em que um dos concorrentes acertar a cor do seu disco. Como os concorrentes supostamente são sábios, é razoável admitir que eles seguirão a melhor estratégia em cada situação e portanto teremos

$$P(X) + P(Y) + P(Z) = 1$$

onde $P(X)$, $P(Y)$ e $P(Z)$ são, respectivamente, as probabilidades de vitória de X, Y e Z.

A estratégia é ótima e a correspondente probabilidade de vitória de *X*

Se *X* vir dois discos pretos nos seus adversários, saberá que restam três discos brancos. Responderá então com absoluta segurança que possui um disco branco. Assim o evento E_7 lhe é favorável. Caso *X* veja dois discos brancos, saberá que restam dois discos pretos e um disco branco. Logo responderá possuir disco preto, contando com a probabilidade 2/3 de acertar. Conseqüentemente, o evento E_2 lhe é favorável e o evento E_1 lhe é desfavorável. Suponhamos agora que *X* tenha visto um disco branco e um disco preto em seus concorrentes. Concluirá que restam dois discos brancos e um disco preto. Logo, deverá responder que possui um disco branco, contando com a probabilidade 2/3 de acertar. Segue que os eventos E_3 e E_4 lhe são favoráveis e o evento E_6 lhe é desfavorável.

Em resumo, usando essa estratégia, *X* irá acertar, na hipótese de ter ocorrido qualquer um dos eventos disjuntos E_2, E_3, E_4 ou E_7 e irá errar se houver E_1, E_5 ou E_6. Segue-se, então, que:

$$P(X) = \frac{n(E_2) + n(E_3) + n(E_4) + n(E_7)}{n(U)} = \frac{6 + 12 + 12 + 12}{60} = \frac{7}{10}.$$

Isto mostra que a probabilidade de vitória do príncipe Camozã, o primeiro candidato, é de 70%, contando com a sua sabedoria.

Conclusão

Vimos que a probabilidade de o príncipe Camozã responder corretamente a respeito da cor do seu disco é de 70%, restando assim apenas 30% de probabilidade para que os outros dois príncipes tivessem chance de serem apenas interrogados.

Considerando ainda que Aradim só seria interrogado caso Benefir (o segundo interrogado) também errasse, pode-se mostrar que ele é o que teria a menor chance de ser escolhido como noivo de Dahizé.

No entanto, Aradim é possuidor de muita sorte, pois os dois primeiros concorrentes erraram. Mas, sem sombra de dúvidas, ou ele é o menos sábio entre todos ou faltou-lhe coragem para protestar quando os dois outros passaram à sua frente.

Só para completar, a probabilidade de Benefir acertar é de 20%, e a probabilidade do príncipe Aradim acertar é de apenas 10%.

NR

A rehabilitação de Aradim

O leitor atento poderá não concordar com a conclusão desta história — afinal, o rei dissera que os príncipes deveriam justificar a resposta correta.

Fica a pergunta sobre o que o rei entendia por “justificar”.

Seria aceitável, em caso de dúvida, uma adivinhação educada, isto é, uma opção pela alternativa mais provável? Ou seria necessária uma explicação lógica de como se chegou à única alternativa correta possível? Neste caso, quais seriam as probabilidades de vitória de cada um dos três concorrentes?

Uma lenda: Torre de Hanoi

Renate Watanabe

Esse interessante jogo é apresentado de forma lúdica, como uma história ocorrida em um mosteiro na Índia. Mostra a necessidade da construção de um método para resolver problemas: partindo de casos mais simples, discutir possíveis generalizações.
Estuda-se o jogo para 1 disco, 2 discos, 3 discos e 4 discos, e tenta-se obter uma solução para um número qualquer de discos. Discute-se o processo de generalização, que pode não ser válido, mostrando-se vários exemplos.
Também trabalha com ordem de grandeza, discutindo, por exemplo, quanto tempo é – em segundos, minutos, horas, dias ou anos – o número 2^{64}.

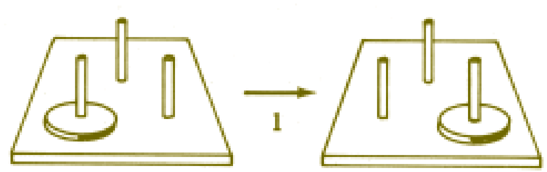
Após a criação do mundo, em um mosteiro escondido na Índia, o Grande Criador colocou uma placa de bronze e nela fixou três bastões cobertos de diamantes. Em um dos bastões, em ordem decrescente de tamanho, colocou 64 discos de ouro. E assim disse aos monges: "Transfiram esta pilha de discos para outro bastão, movendo, ininterruptamente, um disco de cada vez, e nunca permitindo que um disco fique acima de um menor. Quando terminarem esta tarefa, e os 64 discos estiverem em outro bastão, este templo se reduzirá à pó, e com um estrondo de trovões o mundo acabará."

Dizem os sábios que o mundo foi criado há 4 bilhões de anos aproximadamente e os monges, desde a criação, estão movendo os discos, na razão de um disco por segundo.

Será que veremos o mundo acabar?

É muito difícil imaginar os movimentos feitos com uma pilha de 64 discos.

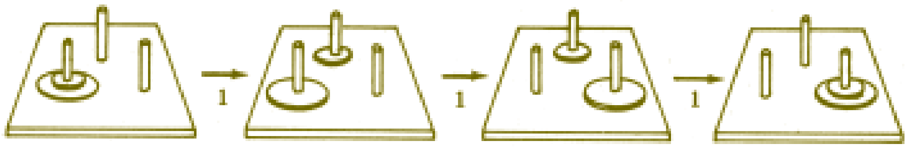
Imaginemos uma pilha com 1 disco:



Para 1 disco, a transferência se dá com 1 movimento:

$$m_1 = 1$$

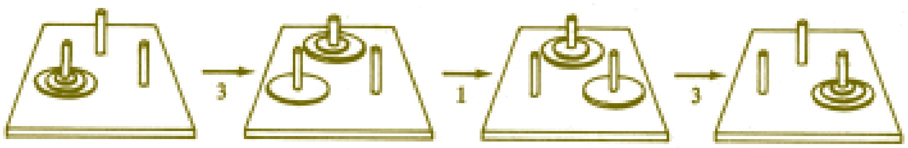
Dois discos



$m_2 = 3.$

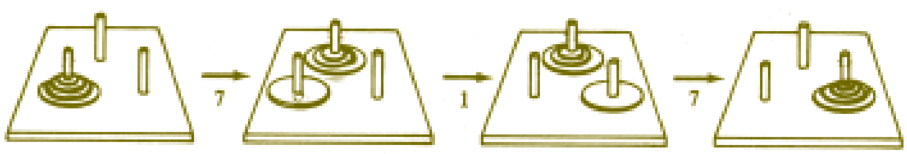
Para 2 discos, a transferência se dá com 3 movimentos.

Três discos:



$m_3 = 7.$

Quatro discos:



$m_4 = 15.$

Já se pode ver como deslocar n discos, com um menor número de movimentos possível: inicialmente, movem-se $n - 1$ discos para o bastão de trás, com m_{n-1} movimentos; em seguida, move-se o n-ésimo disco para o outro bastão da frente, com 1 movimento; finalmente movem-se os $n - 1$ discos do bastão de trás para o da frente, com m_{n-1} movimentos. Tem-se:

$$m_n = m_{n-1} + 1 + m_{n-1} = 2m_{n-1} + 1.$$

Façamos uma tabela com o número de discos e o número de movimentos mínimo para mudá-los de um bastão para outro:

n	1	2	3	4	5	6	...
m_n	1	3	7	15	31	63	...

Precisamos descobrir o valor de m_{64}, porque m_{64} segundos após a criação do mundo ele acabará, e já se passaram 4 bilhões de anos!

Observando a segunda linha da tabela, vemos que os seus números são, a menos de 1: 2, 4, 8, 16, 32, 64, ou seja, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, o que nos leva a fazer a seguinte conjetura:

$$m_n = 2^n - 1.$$

Esta sentença é verdadeira para n = 1, 2, 3 ,4 5, 6, mas será verdadeira sempre?

Tentemos demonstrá-la por indução.

Seja S o conjunto dos números naturais n tais que, n discos são movidos com $2^n - 1$ movimentos.

1) 1 0 S, pois para 1 disco necessitamos de $1 = 2^1 - 1$ movimentos.

2) Vamos supor que k 0 S, isto é, k discos são removidos com $2^k - 1$ movimentos.

Vamos provar que $k + 1$ 0 S, isto é, que $m_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.

Para remover $k + 1$ discos passamos, inicialmente, k discos para o bastão de trás com m_k movimentos; em seguida, com 1 movimento, o $(k + 1)$ –ésimo disco vai para o outro bastão da frente; com m_k movimentos, os k discos de trás passam para o bastão da frente. Isto é,

$$m_{k+1} = m_k + 1 + m_k.$$

$$m_{k+1} = 2^k - 1 + 1 + 2^k - 1 = 2 \,.\, 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$$

e isto mostra que $k + 1$ 0 S.

O princípio da indução nos garante que n discos podem sempre ser removidos com $2^n - 1$ movimentos e, em particular, $m_{64} = 2^{64} - 1$.

E assim, ficamos sabendo que $2^{64} - 1$ segundos após a criação do mundo, ele terminará. Com um pouco mais de Matemática, ficaremos sabendo se isto ocorrerá logo.

Façamos alguns cálculos. Quantos segundos tem um ano?

Resposta:

$$60 \,.\, 60 \,.\, 24 \,.\, 365 \frac{1}{4} = 31557600 < 2^{25} = 1024 \,.\, 1024 \,.\, 32 = 33\,554\,432$$

Exagerando, vamos supor que os monges façam 2^{25} movimentos por ano (na verdade fazem uns 2 milhões a menos). Com isso, o mundo acabará em

$$\frac{2^{64}}{2^{25}} = 2^{39} \text{ anos.}$$

$$2^{39} = 2^{10} \,.\, 2^{10} \,.\, 2^{10} \,.\, 2^{9} = 1\,024 \,.\, 1\,024 \,.\, 1\,024 \,.\, 512 > 512 \,.\, 10^{9}.$$

Passaram-se até hoje 4 bilhões de anos, ou seja, $4 \,.\, 10^9$ anos.

Podemos ficar tranqüilos – faltam mais do que 508 bilhões de anos para os monges terminarem sua tarefa – isto, supondo que eles não errem no caminho.

Os bastões com 7, 8 ou 9 discos constituem um brinquedo conhecido como "Torre de Hanoi"(4), inventado pelo matemático francês Edouard Lucas (1842-1891) e já vendido como brinquedo em 1883. Um folheto o acompanhava, contando a lenda acima. E. Lucas demonstrou um teorema conhecido como "teste de Lucas", que lhe permitiu provar, entre outros fatos, que $2^{127} - 1$ é um número primo e este foi, até 1952, o maior número primo conhecido.

$$2^{127} - 1 = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727.$$

Em que dia da semana foi proclamada a independência do Brasil?

Paulo Sérgio Argolo Gonçalves

Segunda-feira? Terça-feira?... Sábado? Domingo?

A atividade sugerida trata de com um problema prático bastante concreto: saber em que dia da semana caiu 07 de setembro de 1822. O professor pode introduzir o assunto com problemas mais simples, do tipo: que dia da semana foi 1º de janeiro deste ano? E 1º de dezembro do ano passado? Pode "personalizar" o problema, pedindo a cada aluno que calcule em que dia da semana nasceu.
A solução para estas perguntas vai mostrar o caminho a ser seguido, o raciocínio matemático envolvido. O conteúdo tratado é divisão de números inteiros e restos destas divisões. Apesar do conteúdo ser simples, é ao tentar resolver os problemas propostos, que surge uma grande riqueza de possibilidades. Como utilizar o que já conhecemos para resolver problemas reais, envolvendo matemática? Existem vários caminhos possíveis?

Introdução

Seria fácil responder à pergunta do título se o ano tivesse exatamente 364 dias. Como 364 é divisível por 7, ano após ano, os mesmos dias do mês cairiam nos mesmos dias da semana.

Um ano, porém, tem, aproximadamente, 365,25 dias. Este é o motivo por que, adotando 365 como o número de dias de um ano, a cada 4 anos é necessário fazer uma correção através de um ano bissexto, de 366 dias.

Mas esta correção ainda não é suficiente pois, para manter o calendário em sincronia com as estações do ano, este deveria ter 365,242199 dias. Por este motivo, o papa Gregório XIII, em 1582, promulgou o calendário gregoriano, ainda em uso nos dias de hoje, onde os anos bissextos são assim caracterizados:

anos bissextos são os correspondentes a números divisíveis por 4, mas não por 100, exceto os divisíveis por 400, estes, também, bissextos.

Daremos inicialmente a regra prática que permite determinar o dia da semana de qualquer data entre 01/01/1800 e 31/12/2100. Na segunda parte do artigo justificaremos esta regra.

A regra prática

Usaremos uma tabela em que a cada mês corresponde um número. Para os anos bissextos serão usados os números entre parênteses.

jan.	**1 (0)**	**jul.**	**0**
fev.	4 (3)	ago.	3
mar.	**4**	**set.**	**6**
abr.	0	out.	1
maio	**2**	**nov.**	**4**
jun.	5	dez.	6

Um outra tabela associará os dias da semana com os números inteiros de a 6:

resto	dia
1	dom.
2	**2ªf.**
3	3ªf
4	**4ªf.**
5	5ªf
6	**6ªf**
0	sáb.

1º caso:

datas de 01/01/1900 a 31/12/1999

Vamos determinar a soma $A + B + C + D$, onde

A é o número formado pelos dois últimos algarismos do ano dado.

B é a parte inteira do quociente da divisão de A por 4.

C é o dia do mês dado.

D é o número da primeira tabela correspondente ao mês dado.

Em seguida dividimos $A + B + C + D$ por 7, achando um resto inteiro entre 0 e 6. A segunda tabela mostra como associar o resto com o dia da semana.

Exemplo:

18 de outubro de 1956

Temos: $A = 56$

$B = 14$ (quociente de 56 por 4)

$C = 18$

$D = 1$ (correspondente a outubro)

$$\begin{array}{l|l} 89 & 7 \\ \cline{2-2} 5 & 12 \end{array}$$

Logo, a data foi uma quinta-feira.

2º caso:

datas de 01/01/2000 a 31/12/2099

Acrescentamos 6 à soma definida no 1º caso. O restante do processo é o mesmo. Por exemplo: 20 de fevereiro de 2040.

$A = 40$

$B = 10$

$C = 20$

$D = 3$ (corresponde a fevereiro em ano bissexto)

acréscimo = 6

$$\begin{array}{l|l} 79 & 7 \\ \cline{2-2} 2 & 11 \end{array}$$

A data será, portanto, uma segunda-feira.

3º caso:

datas de 01/01/1800 a 31/12/1899

Agora acrescentamos 2 à soma definida no 1º caso.

Exemplo: 7 de setembro de 1822

A = 22

B = 5 (quociente na divisão de 22 por 4)

C = 7

D = 6

acréscimo = 2

$$\begin{array}{r|l} 42 & 7 \\ \cline{2-2} 0 & 6 \end{array}$$

Logo, a proclamação da Independência do Brasil ocorreu num **sábado.**

Justificativa da regra prática

Vamos nos limitar a uma justificativa para o período de 01/01/1900 a 31/12/1999, pois, adotando roteiro análogo, poderá o leitor completar as lacunas que permanecerem e assim desfrutar um agradável entretenimento aritmético.

No que segue, usaremos sempre as letras A, B, C e D, como foram definidas acima.

Vejamos a tabela dos meses:

Janeiro

Usando a regra prática, descobriremos que o dia 1º de janeiro de 1900 caiu numa segunda-feira. Este é um fato que será usado para a construção da tabela.

Ao dia 1, portanto, está associado o número 2 (de 2ªf.), o mesmo acontecendo com os dias 8, 15, 22 e 29, todos do tipo $7k + 1$. Isto é, se o dia do mês for do tipo

$7k$ + **1**, a ele estará associado o número **2**(1 + 1).

Analogamente, se o dia for do tipo

$7k$ 4 – **2**, a ele estará associado o número **3** (2 + 1);

$7k$ + **3**, a ele estará associado o número **4** (3 + 1);

. . . .

$7k$ + **6**, a ele estará associado o número **0** (sábado);

$7k$ + **0**, a ele estará associado o número **1** (domingo).

Uma possível regra prática para janeiro de 1900 seria: divida o dia do mês por 7 e acrescente 1 ao resto da divisão, ou, o que é mais simples: *some* 1 *ao dia do mês — o resto da divisão por* 7 *(do resultado) dará o dia da semana.* Esta é a razão do 1 ao lado de janeiro.

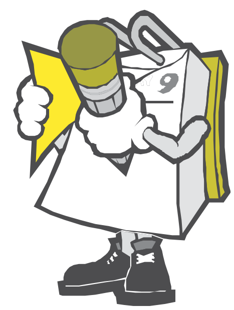
Fevereiro

Observe que do dia 01/01 a 28/01 existem 4 semanas completas, sobrando ainda 3 dias de janeiro (os dias 29, 30 e 31). Portanto à data C de fevereiro de 1900 devemos somar 1+3 (1 que já vem de janeiro, mais 3 por causa dos dias 29, 30 e 31) e dividir o resultado por 7 para que o resto da divisão dê o dia da semana.

(Observe:

31/01 — $31 + 1 = 32 = 4 \times 7 + 4$ — 4ªf.

01/02 — $1 + 1 + 3 = 5$ — 5ªf.)



Isto explica o porquê da parcela 4 ao lado de fevereiro.

Março

Fevereiro tem 4 semanas completas (em anos não bissextos). Portanto a mesma regra de fevereiro de 1900 serve para março de 1900: *some* 4 *ao dia* C *de março de* 1900 *e divida o resultado por* 7.

Abril

Março tem 31 dias, isto é, 4 semanas completas mais 3 dias.

À data C de abril de 1900 deve-se somar a parcela 4 + 3(4, que já vinha de março, e mais 3, por causa dos dias 29, 30 e 31 de março).

Mas o resto da divisão de $C + 7$ por 7 é igual ao resto da divisão de C por 7.

Daí, o 0 na tabela, ao lado de abril.

Maio

Abril tem 30 dias, isto é, 4 semanas mais 2 dias.

Basta somar 2 a cada dia C de maio de 1900 e dividir o resultado por 7.

O resto dará o dia da semana.

Esta é a razão do 2 ao lado de maio.

Junho

Maio tem 4 semanas e mais 3 dias.

Ao dia C de junho de 1900 devemos somar $2 + 3$ (2 é a parcela que vinha de maio e 3, por causa dos dias 29, 30 e 31 de maio).

Isto explica o 5 ao lado de junho.

O leitor saberá justificar, para1900, os números ao lado dos outros meses.

Seja agora um ano N, não bissexto, entre 1900 e 2000, cujos dois últimos algarismos formem o número A.

Entre 1 de janeiro de 1900 e 1 de janeiro do ano N, transcorreram A anos, sendo B (parte inteira do quociente de A por 4) o número de anos bissextos. A quantidade de dias nesse período foi $366\,B + 365\,(A - B) = 365\,A + B = 364\,A + A + B$

Já que $364\,A$ é divisível por 7, o resto da divisão de $365\,A + B$ por 7 é igual ao resto da divisão de $A + B$ por 7. Para determinarmos o dia da semana em que caiu um dia C de um mês qualquer do ano N, basta encontrar o resto da divisão por 7 da soma $A + B + C + D$.

Suponhamos agora o ano N, bissexto.

Entre 1 de janeiro de 1900 e 1 de janeiro do ano N, transcorreram A anos dos quais $B - 1$ foram bissextos. A quantidade de dias nesse período foi:

$$366\,(B - 1) + 365\,[A - (B - 1)] = 365\,A + B - 1 = 364\,A + A + B - 1$$

O resto da divisão deste número por 7 é igual ao resto da divisão de $A + B - 1$ por 7. Assim, para localizarmos o dia da semana em que caiu um dia C de janeiro ou fevereiro do ano N, basta achar o resto da divisão por 7 da soma $A + B + C + D - 1$. Esta é a razão dos números entre parênteses, ao lado de janeiro e fevereiro, na tabela dos meses.

Se a data C não pertencer a janeiro ou fevereiro, será necessário calcular o resto da divisão por 7 do número $(A + B - 1) + (C + D + 1)$, sendo o acréscimo 1 devido ao fato de fevereiro ter um dia a mais em um ano bissexto. Mas,

$$(A + B + - 1) + (C + D + 1) = A + B + C + D$$

Portanto, para meses diferentes de janeiro e fevereiro a tabela não sofrerá qualquer alteração.

Queremos ainda mencionar que, embora tenhamos apresentado um método válido para o período de 01/01/1800 a 31/12/2099, o leitor poderá com algumas modificações necessárias localizar dias da semana para outros períodos de tempo.

Dominós

Fechando o dominó

Alexandre Kleis

Estas atividades usam o jogo de dominós para motivar o estudo de contagem, múltiplos, divisores e paridade de números naturais.
A simples construção de um jogo de dominós, usando cartolina ou papel cartão é um exercício de contagem organizada para decidir, por exemplo, quantas e quais peças precisam ser construídas,ou quantas vezes um determinado número aparece nas peças.
A construção pode ser feita mesmo na 5ª série. O desafio da construção dos "quadrados mágicos" com as peças de dominó exercitam a criatividade e as operações aritméticas.
"Fechando o dominó" envolve observação, contagem e paridade.
Estas atividades podem ser utilizadas desde a 5ª série, mas serão úteis e lúdicas também para alunos até da 8ª série.

O problema

Meu irmão estava jogando dominó com alguns amigos, quando um deles "fechou" o jogo. Encerrado assim, sem ninguém "bater", cada dupla contou seus pontos (a soma dos números das pedras que sobraram). Um jogador disse "22" e outro falou "15". Aí um amigo de meu irmão protestou:

— Não pode! Se o jogo foi fechado e uma dupla tem um número par de pontos, a outra também tem. Ou então as duas têm números ímpares de pontos.

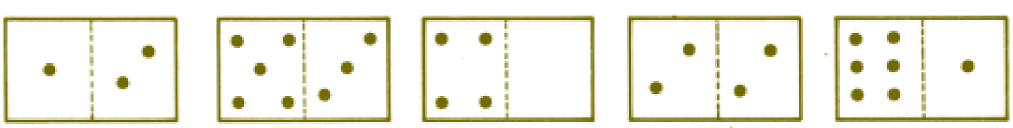
De fato, analisando o jogo, descobriram um "gato": uma pedra colocada erroneamente, lá no meio.

Meu irmão ficou curioso. Por que a paridade das somas de pontos tinha de ser a mesma? Seu amigo lhe deu uma resposta que não o convenceu — jogava há anos dominó e sempre fora assim.

O que segue é uma explicação que encontrei para esta dúvida.

A explicação

O dominó é um jogo formado por 28 peças, como as da figura:



Nelas aparecem todas as combinações possíveis dos números de 0 a 6, dois a dois, inclusive com repetição. Cada número aparece 8 vezes.

Creio que todos os leitores conhecem as regras do jogo.

Um exemplo de jogo fechado é o seguinte:

Este jogo se diz "fechado" porque todas as pedras que contêm o "3" já estão na mesa e, em conseqüência, ninguém mais tem como jogar.

Em um jogo fechado, os números nas duas extremidades são iguais. De fato, todos os números, salvo os das pontas, aparecem aos pares, pela própria regra do jogo. Portanto, um jogo fechado que começa com 3, por exemplo, terá 6 ocorrências do 3 "internamente" e o último 3 disponível terá que estar, necessariamente, na outra ponta.

Como conseqüência, a soma de todos os números (na mesa), em um jogo fechado, será *par.*

Observando que a soma total dos pontos em um jogo de dominós é $S = 8\,(0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$ e, por-tanto, *par,* vê-se que, em um jogo fechado, sobra, ao todo, um número par de pontos nas mãos das duas equipes adversárias.

Isto significa que cada uma das equipes terá um número par de pontos (dando uma soma par), ou cada uma das equipes terá um número ímpar de pontos (dando também uma soma par). O que não pode acontecer é que a soma dos pontos de uma equipe seja par e da outra, ímpar, pois neste caso a soma total seria ímpar, o que já vimos não pode acontecer.

Outra observação

Com uma definição adicional, podemos tirar mais uma conclusão.

Definição. *Uma pedra é ímpar quando a soma de seus números for ímpar.*

Por exemplo, 3 : 2 é uma pedra ímpar.

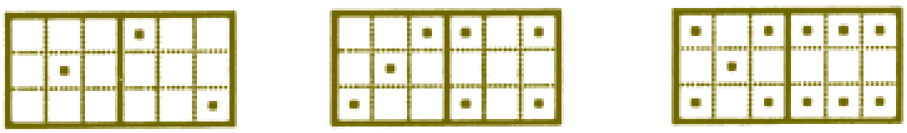
Conclusão. *Em um jogo fechado, a quantidade de pedras ímpares, na mesa, é par.*

De fato, já vimos que em um jogo fechado, a soma dos pontos, na mesa, é par. Ora, uma soma par deve ter um número par de parcelas ímpares.

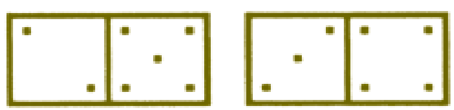
O jogo de dominós (um desafio matemático?)

José Lafayette de
Oliveira Gonçalves

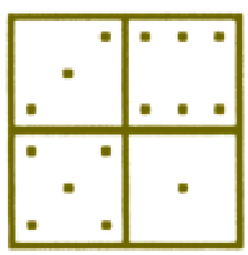
Um jogo muito antigo e conhecido por muitos estudantes e professores é o jogo de dominós. Ele é constituído por 28 peças retangulares e pode ser confeccionado com retângulos, por exemplo, de 6 cm x 3 cm, divididos em 18 quadradinhos de 1 cm x 1 cm. A marcação dos pontos em cada peça deve obedecer a uma certa estética:



As peças de dominó têm sido usadas em sala de aula, nas séries iniciais, para efetuar e fixar pequenas somas. Por exemplo:



2 + 5 = 3 + 4 = 7



9
+
6

8 + 7 15

O próprio jogo de dominós é desafiante. O mais comum é o que envolve 4 jogadores, divididos em duplas. Cada jogador recebe 7 peças, e torna-se vencedora aquela dupla em que um dos parceiros consegue colocar todas as suas peças antes dos demais jogadores. Jogadores hábeis observam as peças à medida que vão sendo jogadas e descobrem rapidamente quais ainda estão nas mãos do parceiro ou dos adversários, permitindo-lhes elaborar estratégias que os levam à vitória.

Podemos também utilizar os dominós para apresentar aos nossos alunos alguns desafios interessantes:

1. Com as 8 peças: (0 e 0); (0 e 1); (0 e 2); (0 e 3); (1 e 1); (1 e 2); (2 e 2) e (2 e 3), formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 5.

   Um pouco mais difícil é o seguinte desafio:

2. Com as 8 peças: (1 e 1); (1 e 2); (1 e 3); (1 e 4); (2 e 3); (2 e 4); (3 e 4) e (3 e 5), formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 10.

3. Trocando apenas as peças (l e 1) e (3 e 5) pelas peças (0 e 2) e (4 e 4), repetir o desafio acima.

4. Finalmente, com as 18 peças:

   (0 e 0); (0 e 1); (0 e 2); (0 e 3); (0 e 4); (0 e 5);

   (1 e 1); (1 e 2); (1 e 3); (1 e 4); (1 e 5); (1 e 6);

   (2 e 2); (2 e 3); (2 e 4); (2 e 6); (3 e 3) e (3 e 4),

   formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 13.

O jogo dos quadrinhos

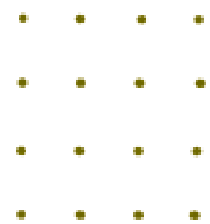
Helder de Carvalho Matos

Esta atividade utiliza o jogo de quadradinhos, que é bastante conhecido em algumas regiões. Caso os alunos não o conheçam, o professor pode apresentá-lo e ensiná-los a jogar.

A atividade estabelece estratégias para se ganhar o jogo e pode ser aplicada, com adaptações em qualquer série da 5ª a 8ª.

O jogo de quadrinhos é muito conhecido e tão simples que pode ser explicado em poucas palavras. Ele é jogado num quadriculado de pontos como ilustra a Figura 1.

Figura 1



Cada jogador marca uma aresta unindo dois vértices na mesma horizontal ou na mesma vertical (Figura 2).

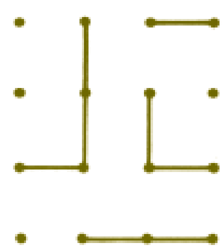


Figura 2

E toda vez que um dos jogadores, ao colocar uma aresta, completar um circuito fechado, ele tem direito (e obrigação) de marcar nova aresta (é importante não confundir "circuito fechado"com "quadrinho unitário" ou, simplesmente, "quadrinho". Embora todo quadrinho seja um circuito fechado, este pode ser mais geral que um simples quadrinho, como ilustra a Figura 3).

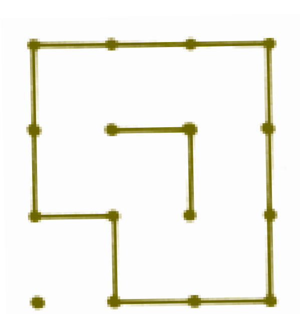


Figura 3

Ganha o jogador que fechar o maior número de quadrinhos, e o jogo termina quando o quadriculado original ficar reduzido apenas a quadrinhos. Para facilitar a contagem, os jogadores marcam os quadrinhos que vão fechando com sua inicial. Por exemplo, se Herculano joga com André, o jogo pode terminar com a vitória de André (Figura 4)

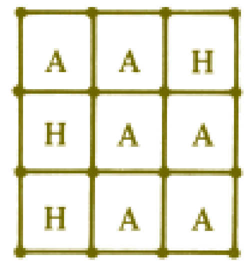


Figura 4

O jogo de quadrinhos é largamente jogado em fundos de salas de aulas, sobretudo quando a aula fica muito chata... E foi depois de muito jogar em tais circunstâncias que acabei descobrindo como prever, em qualquer jogo, qual dos dois jogadores ganhará (ou, pelos menos empatará) o jogo.

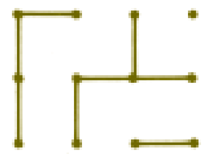


Figura 5

Daremos algumas definições preliminares. Diremos que o jogo se encontra numa situação *quase final*, quando no quadriculado não existirem quadrinhos com três arestas, mas um tal quadrinho forçosamente se formará com o acréscimo de qualquer nova aresta (Figuras 5 e 6). Chamaremos *corredor* a uma seqüência de quadrinhos que serão fechados por jogadas sucessivas de um mesmo jogador (Figura 6).

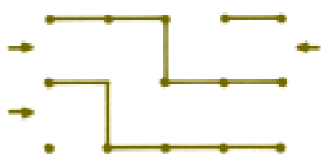


Figura 6

Quando um jogo se encontra em situação quase final, como ilustra a Figuras 6, ele consiste exclusivamente de corredores, e qualquer aresta adicional precipita o fechamento de quadrinhos ao longo de um corredor. Vamos enumerar os corredores em ordem crescente (mais precisamente, não-decrescente) de seu tamanho. Por *tamanho de um corredor* entendemos o número de quadrinhos que ele produz com os fechamentos sucessivos. No caso da Figura 7, $C_1 = C_2 = 1$, $C_3 = 2$ e $C_4 = 5$.

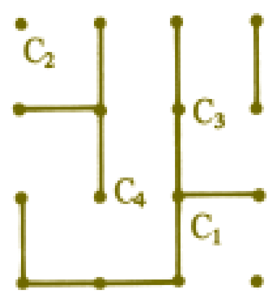


Figura 7

Vamos supor, como é natural, que cada jogador proceda da maneira a não entregar quadrinhos; e se for obrigado a entregar alguns, que entregue o menor número possível, isto é, que entregue o corredor que tenha menos quadrinhos a fechar. Chamaremos esse procedimento de *perda mínima*. Veremos, logo adiante, que tal procedimento não assegura vitória, ou mesmo empate; mas permite prever quem vai ganhar (ou empatar) o jogo.

Observemos agora que o jogador que fechar o último corredor (o de número r), fecha também os de números $r - 2$, $r - 4$, ..., e o outro jogador fechará os corredores $r - 1$, $r - 3$, $r - 5$, ... Há dois casos a considerar, conforme r seja par ou ímpar.

1º caso: *r par*. O jogador que fechar o último corredor ganhará um número de quadrinhos igual a

$$S_1 = C_r + C_{r-2} + \ldots + C_2$$

e o outro jogador ficará com $S_2 = C_{r-1} + C_{r-3} + \ldots + C_1$ quadrinhos.

2º caso: *r ímpar*: O jogador que fechar o último corredor ganhará

$S_1 = C_r + C_{r-2} + \ldots + C_1$ quadrinhos, ao passo que o outro ficará com

$S_2 = C_{r-1} + C_{r-3} + \ldots + C_2$ quadrinhos.

Vamos colocar esses dois casos a lado, em colunas, o que nos permite comparar as somas S_1 e S_2.

$$\begin{array}{rcc}
 & r \text{ par} & r \text{ ímpar} \\
 & C_r \geq C_{r-1} & C_r \geq C_{r-1} \\
 & C_{r-2} \geq C_{r-3} & C_{r-2} \geq C_{r-3} \\
 & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
 & C_2 \geq C_1 & C_1 > 0 \\
\hline
\text{Soma} & S_1 \geq S_2 & \text{Soma} \quad S_1 > S_2
\end{array}$$

Isto permite constatar, facilmente, que o jogador que terminar o jogo sempre levará vantagem e certamente ganhará se r for impar, pois neste caso, S_1 é estritamente maior que S_2. Portanto, a estratégia para ganhar (ou, pelos menos, empatar) o jogo é assegurar-se de fechar o último corredor.

Quando, ainda no ensino médio, eu me divertia com o jogo de quadrinhos, acabei percebendo a necessidade de ganhar o último corredor para não perder o jogo. E acabei descobrindo também que *se o número de vértices for ímpar, então ganha ou empata o primeiro jogador (o que começa o jogo); ao passo que se o numero de vértices for par, então ganha ou empata o segundo jogador.*

Para estabelecermos esse resultado, vamos considerar o jogo já em situação quase final, quando então vale a seguinte fórmula de Euler generalizada*:

$$A + r = V + R - 2,$$

onde A é o número de arestas, r o numero de corredores, V o número de vértices e R o número de regiões. As Figuras 6 e 7 ilustram jogos com uma única região cada um, que é o plano todo. Já as Figuras 8 e 9 mostram jogos com três regiões cada um: R_1, R_2 e R_3.

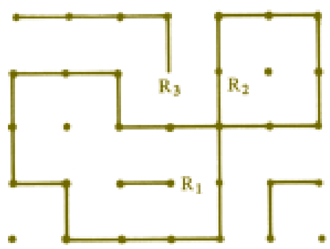


Figura 8

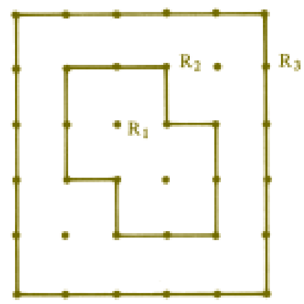


Figura 9

Para determinar quem ganha o último corredor e, portanto, ganha ou empata o jogo, vamos primeiro supor que $R = 1$ quando o jogo chega a uma situação quase final. Isto significa que no quadriculado não há circuitos fechados. Então, a fórmula de Euler nos dá.

$$A + r = V - 1.$$

Temos de examinar duas hipóteses, conforme V seja ímpar ou par, e cada uma delas comporte dois casos.

1ª hipótese: V é impar. Então $A + r$ é par, daí os dois casos seguintes:

Caso 1a: A e r ambos pares. Disto decorre que foi o segundo jogador quem colocou a última aresta (pois A é par), levando o jogo à situação quase final. Portanto, é o primeiro jogador que entregará o primeiro corredor ao segundo; e como r é par será o primeiro quem fechará o último corredor, ganhando ou, pelo menos, empatando o jogo.

Caso 1b: A e r, ambos ímpares. Então, foi o primeiro jogador quem colocou a última aresta (pois A é impar), levando o jogo à situação quase final. Em

* Essa fórmula é uma conseqüência simples da fórmula de Euler para grafos planos (veja-a na pág 143 do livro *Teoria e Modelos de Grafos* de Paulo O. Boaventura Netto. Editora Edgard Blücher, 1979)

conseqüência, o segundo jogador entregará o primeiro corredor ao primeiro jogador; e como r é impar, o primeiro jogador fechará o último corredor, ganhando o jogo, pois neste caso não há empate.

2ª hipótese: V é par. O raciocínio aqui é inteiramente análogo ao da 1ª hipótese, com dois casos a considerar. A única diferença é que agora quem ganha ou empata o jogo é o segundo jogador.

Falta examinar o caso em que $R > 1$. Ora, quando o jogo começa, $R = 1$, pois só temos uma região, que é o plano todo. *E*, se R permanecer igual a 1 até a situação quase final, um dos jogadores é o favorecido; como acabamos de ver, trata-se do primeiro, se V for ímpar e do segundo se V for par. Se um dos jogadores decide fechar um circuito, ele altera a paridade de $V + R - 2$, na situação quase final, portanto altera a paridade da soma $A + r$ na fórmula de Euler e, repetindo os argumentos já usados, o anteriormente favorecido passa a ser o desfavorecido. Mas lembremos que, pelas regras do jogo, o próprio jogador que fechou um circuito é obrigado a colocar uma nova aresta, o que novamente altera a posição dos jogadores, restabelecendo as previsões originais. Isto completa a demonstração do teorema em todos os casos.

Dois é maior que três?

Evidentemente que existe um erro na demonstração. Deixamos para o leitor sua descoberta e discussão.

2 > 3

DEMONSTRAÇÃO

Afirmações	Razões
1. $1/4 > 1/8$	1º De duas frações de mesmo numerador, maior é a que tem menor denominador.
2. $(1/2)^2 > (1/2)^3$	2º Colocando 1/4 e 1/8 sob forma de potência.
3. $\log (1/2)^2 > \log(1/2)^3$	3º A um número maior, corresponde também um logaritmo maior.
4. $2.\log 1/2 > 3.\log 1/2$	4º Propriedade operatória dos logaritmos.
5. $2 > 3$?	5º Dividindo ambos os membros de (4) por log 1/2;

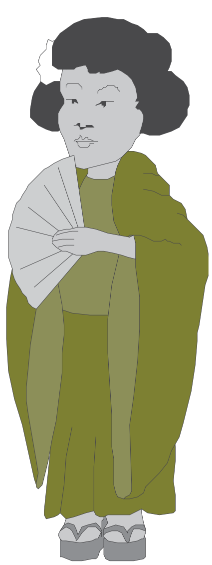
Se fosse usado logaritmo de base positiva menor que um nesta demonstração, que conseqüência traria para razão (3')?

Abdala Gannam

O jogo do Nim – um problema de divisão

Carlos Alberto V. de Melo

Este antigo jogo chinês exercita a operação de divisão, além do raciocínio dedutivo e busca de estratégias de vitória. Um aluno de 5º série pode ser sempre um vencedor, se entender a Matemática envolvida no jogo.



Existe um jogo de palitos, tradicionalmente famoso, proveniente da China e chamado JOGO DO NIM.

O jogo, disputado por dois jogadores, é estabelecido da seguinte forma:

1. a quantidade de palitos deve ser um número ímpar;
2. cada jogador retira, por sua vez, uma determinada quantidade de palitos, sendo que esta quantidade deve ter um limite mínimo e um máximo, previamente fixados;
3. perde aquele que retirar o último palito.

Com o advento e a popularização dos microcomputadores, este jogo passou a fazer parte do repertório de brincadeiras que se podem fazer com estas máquinas.

Certa vez, um aluno do ensino médio quis saber se existe um método ou fórmula para ganhar do computador, acrescentando que, se a fórmula fosse muito difícil, não seria necessário explicá-la.

Estupefato ele ficou com a resposta: se ele for o primeiro a jogar, sempre poderá ganhar pois o método que lhe dará a vitória é simplesmente um problema de divisão. Assim, qualquer aluno de 5ª série poderá ser um grande vencedor.

Vejamos, então, o método:

Suponhamos que nosso jogo conste de 29 palitos, e que possamos retirar no mínimo 1 (um) e no máximo 4 palitos.

O primeiro a jogar fará mentalmente a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 29 & 5 \\ \hline 4 & 5 \end{array}$$

Temos, então, 5 grupos de 5 palitos, restando 4.

Dos 4 palitos que restam, separamos 1 (um) palito. Tudo isto mentalmente.

Esquematizando, para melhor visualizar, temos a seguinte situação:

III IIIII IIIII IIIII IIIII IIIII I

Então, o primeiro jogador retira 3 palitos, e daí em diante, seja qual for a quantidade que o segundo retirar, o primeiro retirará o que faltar para 5.

Logicamente, o primeiro jogador vencerá.

Outras variantes deste jogo podem ser feitas, a critério da imaginação do professor que quiser utilizá-lo como um bom estímulo para ensinar ou recordar contas de divisão.

Impertinência:

Você só ensina ou também trabalha?

A teoria matemática do jogo de Nim

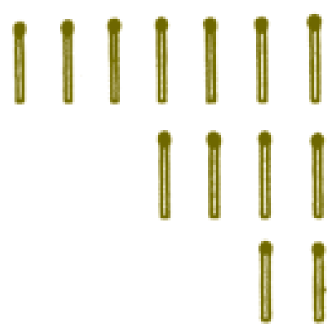
Inez Freire Raguenet

Márcia Kossatz de Barrêdo

O Jogo

Em sua forma original, NIM é um jogo para dois participantes, que chamaremos de jogador *A* e jogador *B*. Colocamos sobre uma mesa 3 pilhas de objetos de qualquer tipo, ou então, usamos palitos de fósforo. Dispomos sobre a mesa 3 filas com um número arbitrário de palitos, sendo que, no início, duas filas não podem ter o mesmo número de palitos.

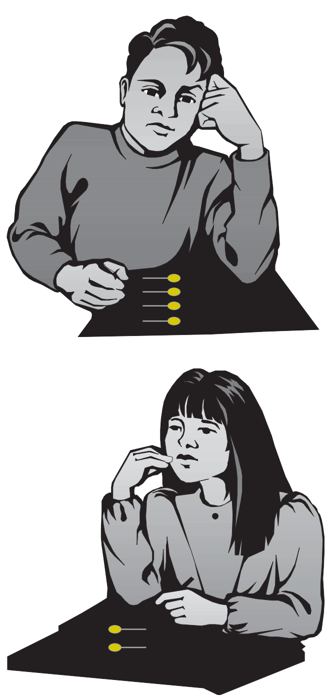
Por exemplo:



1ª fila (7 palitos)

2ª fila (4 palitos);

3ª fila (2 palitos).



Jogar NIM consiste em, após retiradas sucessivas dos palitos de cima da mesa, alternando de jogador para jogador, conseguir deixar o último palito para seu oponente retirar, pois a derrota se dá para aquele que retira o último palito. Estas retiradas só podem ser feitas em uma das filas de cada vez, e o jogador precisa tirar pelo menos um palito. Também é permitido que o jogador retire todos os palitos de uma fila em sua vez de jogar.

O fato interessante é que se na sua vez de jogar você conseguir deixar uma certa configuração de palitos na mesa – de modo que, se depois disso você jogar sem erro, seu oponente não possa ganhar, independentemente das jogadas que ele faça –, esta configuração será chamada uma combinação segura.

Em linhas gerais, a demonstração deste fato consiste em mostrar que se o jogador *A* deixa uma "combinação segura" de palitos na mesa, então *B*, no seu próximo movimento, seja ele qual for, não poderá deixar uma combinação segura. Além do mais, após o movimento de *B*, o jogador A novamente poderá deixar uma nova combinação segura e continuar o jogo.

Como determinar a combinação segura

Suponha que a primeira fila tenha P palitos, a segunda S, e terceira, T palitos. Escreva estes números P, S e T em notação binária e disponha-os em 3 linhas horizontais de tal modo que as casas das unidades se correspondam.

Por exemplo:

$$P = 9 \text{ palitos}, S = 5 \text{ palitos}, T = 12 \text{ palitos}$$

Teremos: $9 = 1.2^3 + 0.2^2 + 0.2 + 1.2^0$, isto é, $P = 1001$ em notação binária.

Usando o mesmo raciocínio, temos, em notação binária, $S = 101$ e $T = 1100$.

Disposição:

P	1001
S	101
T	1100

casa das unidades

Se a soma dos algarismo das casas correspondentes de P, S e T for igual a 0 ou 2 (i.e., congruente a 0 mod 2) então esta será uma combinação segura.

No caso:

$$\begin{array}{lrr} P & & 1001 \\ S & + & 101 \\ T & & 1100 \\ \hline & & 2202 \end{array}$$

(está é uma combinação segura)

Observe que, dados dois números em notação binária, podemos determinar um terceiro que dê uma combinação segura, e de maneira única. Basta escrevê-lo de tal forma que, ao somarmos as casas correspondentes, obtenhamos 0 ou 2.

Por exemplo: dados, já em notação binária, $P = 100$ e $S = 11$; podemos determinar T da seguinte forma:

$$
\begin{array}{lcr}
P & & 100 \\
S & + & 11 \\
T & & ??? \\
\hline
 & & \text{XYZ}
\end{array}
$$

onde X, Y, Z só podem ser 0 ou 2. Neste caso, por uma fácil verificação, $T = 111$.

Não esqueça que T é dado em notação binária, logo, só pode ter os algarismos 0 ou 1.

Em outras palavras, se P, S e T formam uma combinação segura, então quaisquer dois deles determinam o terceiro.

Observações:

1) Como toda regra tem sua exceção, também são combinações seguras:
   a) $P = 1$, $S = T = 0$;
   b) $P = S = T = 1$.
2) Uma combinação segura particular é aquela em que duas filas têm o mesmo número de palitos ($P = S$), e a terceira não tem nenhum ($T = 0$), com exceção de $P = S = 1$ e $T = 0$.

Enunciaremos agora os dois teoremas que ensinam você a ganhar.

Como ganhar no jogo de NIM

Teorema 1: Se o jogador A deixa uma combinação segura na mesa, então B não conseguirá deixar outra combinação segura na sua vez de jogar.

A demonstração é fácil: basta ver que B pode mexer em apenas uma fila de palitos e tem que retirar pelo menos um. Sabendo-se que, dados os números de palitos de duas filas, determina-se unicamente o número de palitos da terceira e considerando-se a A deixou uma combinação segura, qualquer movimento que B faça desmanchará esta combinação segura. Logo, o jogador B não poderá deixar uma nova combinação segura.

Teorema 2: Se o jogador A deixa uma combinação segura na mesa e B retira palitos de uma certa fila, então A poderá recompor uma combina ção segura retirando palitos de uma das filas restantes.

Antes da demonstração, veja um exemplo. Suponha que *A* deixou a seguinte combinação segura na mesa:

9 palitos		P		1001
5 palitos	ou seja	S	+	101
12 palitos		T		1100
				2202

(é uma combinação segura)

Suponha, também, que *B* retira 2 palitos da 1ª fila. Restam:

7 palitos		P		111
5 palitos	ou seja	S	+	101
12 palitos		T		1100
				1312

(não é uma combinação segura)

Se o jogador *A* quer deixar uma combinação segura, é claro que ele terá que retirar palitos da 3ª fila, que contém 12 palitos. Vamos determinar o número de palitos que devem restar na 3ª fila (T') para que *A* consiga uma combinação segura (observe que T' tem que ser menor que T).

Dados:

P		111
S	+	101
T		???
		XYZ.

Ora, para que PST seja uma combinação segura, temos as seguintes possibilidades para XYZ:

$XYZ = 000$ (incompatível com o problema)

$XYZ = 202$ (incompatível também)

$XYZ = 220$ (idem)

$XYZ = 200$ (idem)

.
.
.

e outras.

Prosseguindo neste raciocínio, concluímos que o único valor de XYZ compatível com o problema é 222; portanto, $T' = 0010$, ou seja, 2 palitos. Assim, o jogador A tem que retirar 10 palitos da 3ª fila para obter novamente uma combinação segura.

Agora, a demonstração do teorema 2.

Primeiramente, suponha que o jogador A deixou na mesa uma combinação segura. Daí, B escolhe uma das filas, por exemplo, a primeira, e retira um certo número de palitos dela. Observe que, quando um número diminui, a mudança que ocorre em sua representação binária, olhando da esquerda para a direita, é algum 1 que passa para 0 (caso contrário, o número estaria aumentando). Considere este primeiro algarismo no qual ocorre mudança de 1 para 0. Decorre do fato de o jogador A ter deixado uma combinação segura, que na casa correspondente ao algarismo que sofreu mudança, apenas um número dos dois restantes (P, S ou T) vai conter o algarismo 1 (nunca os dois ao mesmo tempo).

Agora, A escolhe este número e coloca zero na casa onde o algarismo 1 estiver, tomando o cuidado de alterar ou não os algarismos à direita desta casa neste mesmo número (de 0 para 1, ou de 1 para 0) de modo a obter novamente uma combinação segura.

Para ilustrar:

$$\begin{array}{lcrcccrcccr} P & & 1110 & & & & 1110 & & & & 10 \\ S & + & 0100 & & B\text{ joga} & + & 100 & & A\text{ joga} & + & 100 \\ T & & \underline{1010} & & \rightarrow & & \underline{110} & & \rightarrow & & 110 \\ & & 2220 & & & & 1320 & & & & 220 \end{array}$$

(combinação segura) (combinação segura)

O que aconteceu na verdade foi que o jogador A deixou na mesa o número de palitos cuja representação binária é o número resultante das alterações feitas por ele ao armar uma nova combinação segura.

No caso:

14 palitos		14 palitos		2 palitos
4 palitos	*B* joga	4 palitos	*A* joga	4 palitos
10 palitos	$\rightarrow$	6 palitos	$\rightarrow$	6 palitos
(combinação segura)				(combinação segura)

Qualquer que seja a próxima jogada de *B*, por um raciocínio análogo, não impedirá *A* de fazer uma nova combinação segura, retirando os palitos de maneira conveniente. Deste modo, o jogador *A* fatalmente ganhará o jogo, observando as seguintes propriedades e estratégias.

I – Suponha que o jogador *A*, ao deixar uma combinação segura na mesa, retira todos os palitos de uma certa fila. Então, certamente as outras duas filas terão o mesmo número de palitos.

II – Suponha que o jogador *B* retira todos os palitos de uma das filas. Então, as duas outras terão números diferentes de palitos e, assim, o jogador *A* poderá igualá-las, deixando na mesa uma combinação segura.

III – Suponha que, anos após alguma das filas ter seu número de palitos reduzido a zero, o jogador *B* deixe uma das filas restantes com apenas 1 palito. Então, basta A tirar todos os palitos da outra fila, deixando que aquele último seja retirado por *B* e, conseqüentemente, fazendo com que *B* perca o jogo.

IV – Suponha que, tendo uma das filas seu número de palitos reduzido a zero, o jogador *B* "zera" outra fila. Então, basta *A* deixar apenas um palito na fila restante, fazendo também com que *B* perca o jogo.

V – Suponha que o jogador *A* deixou alguma fila com apenas um palito. Então, ocorre uma das três possibilidades:

a) as duas outras filas têm um palito cada uma;

b) as duas filas não têm nenhum palito;

c) as duas outras filas têm números diferentes de palitos uma da outra, as quais, por sua vez, não serão 0 ou 1 simultaneamente.

Resumindo: O jogador que conseguir manter uma combinação segura na mesa ganha o jogo. Assim sendo, se a primeira disposição dos palitos na mesa formar uma combinação segura, a primeira pessoa a jogar vai desmanchar esta combinação segura. Logo, o segundo a jogar terá a sorte de poder recompor uma combinação segura e, se não errar, ganha o jogo. Da mesma forma, se a primeira disposição dos palitos na mesa não formar uma combinação segura, o primeiro a jogar poderá e, novamente, se não errar, ganha o jogo.

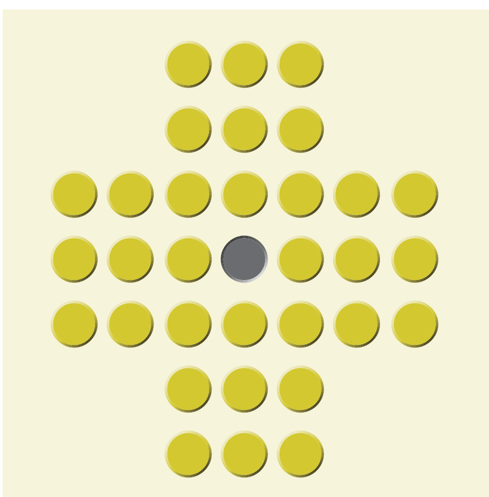
Portanto, ganhar (ou não) depende da probabilidade de se ter uma combinação segura na primeira disposição dos palitos na mesa. E, também, de entender este artigo.

Ref.: Charles L. Bouton – *Annals of Mathematics*, ser. II, vol. 3, Nº 1, Oct. 1901, p. 35 (Nim, a game with a Complete Mathematical Theory).

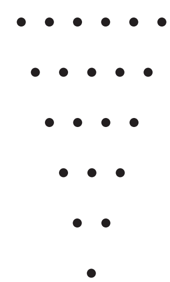
Resta-um, Resta-zero, e a operação Nim

Carlos Augusto Isnard

Instituto de Matemática Pura e Aplicada



Uma variante do jogo do NIM é praticada nas praias brasileiras, com os palitos substituídos por pontos marcados na areia que vão sendo apagados pelos jogadores. O jogo se inicia com seis filas horizontais que tem respectivamente 6, 5, 4, 3, 2 e 1 pontos.



Este jogo é, às vezes, chamado de *Resta-um.*

Os praticantes do jogo conhecem de memória as “combinações seguras” como P, S, T iguais, 1, 2, 3 ou 1, 4, 5 ou 3, 5, 6 ou n, n, 0 ($n \geq 2$) etc. O artigo anterior apresenta uma interessante caracterização matemática dessas combinações seguras, através da representação dos números na base 2.

Mesmo havendo uma quantidade arbitrária de filas, a disposição na base 2, descrita pelos autores, serve ainda para caracterizar as combinações seguras: a combinação será segura quando a soma dos algarismos de cada casa for par, isto é, quando cada coluna vertical tiver uma quantidade par de algarismos 1. Existe uma exceção a esta regra, que ocorre quando nenhuma fila horizontal tiver mais do que um ponto: uma quantidade ímpar de filas com um só ponto é obviamente uma combinação segura para o Resta-um.

O *Resta-zero* é outro jogo, cujas regras são as mesmas do Resta-um, exceto pela definição do vencedor: na regra do Resta-zero o vencedor é quem conseguir apagar o último ponto. As combinações seguras do Resta-zero têm uma caracterização simples: são as mesmas do Resta-um, sem a exceção desagradável no caso em que nenhuma fila tem mais do que um ponto. É óbvio que uma quantidade par de filas de um só ponto é uma combinação segura para o Resta-zero.

Existe uma interessante operação comutativa e associativa relacionada a esses jogos, a operação Nim, definida no conjunto $\mathbf{Z}^+ = \{0, 1, 2, ...\}$ por $P \oplus S = T \Leftrightarrow P, S, T$ é combinação segura para o Resta-zero (o que significa que é também combinação segura para o Resta-um, se $P \geq 2$ ou $S \geq 2$).

Temos: $n \oplus 0 = n = 0 \oplus n$ e $n \oplus n = 0$, para qualquer $n \in \mathbf{Z}^+$, de maneira que na operação, $\mathbf{Z}^+$ é um grupo comutativo com identidade 0 e tal que o inverso de cada n é o próprio n (o grupo Nim).

Havendo m filas com $p_1, p_2, ..., p_m$ pontos, então essa combinação é segura para o Resta-zero se e somente se:

$p_m = p_1 \oplus ... \oplus p_{m-1}$, ou seja, se e somente se $p_1 \oplus ... \oplus p_m = 0$.

Por exemplo 2, 3, 4, 5 é combinação segura (para o Resta-zero, logo também para o Resta-um), porque $2 \oplus 3 \oplus 4 = 5$ (cálculo: $2 \oplus 3 = 1$ e $1 \oplus 4 = 5$, pois 1, 2, 3 e 1, 4, 5 são combinações seguras conhecidas).

Da mesma maneira 1, 5, 4, 3, 2, 1 é combinação segura para ambos os jogos porque $1 \oplus 5 \oplus 4 = 0$ e $1 \oplus 3 \oplus 2 = 0$ (pois 1, 4, 5 e 1, 2, 3 são combinações seguras).

A seguinte regra é útil quando os números são muito grandes: Se $P < 2^k$, então $2^k + P = 2^k \oplus P$ ($P, k \in \mathbf{Z}^+$). Em conseqüência, se $P < 2^k$ e $S < 2^k$ então $2^k + P, 2^k + S, T$ é combinação segura, se e somente se P, S, T é combinação segura ($P, S, T, k \in \mathbf{Z}^+$).

Como aplicação, algumas computações Nim:

19, 21, 6 é combinação segura porque

$$19 \oplus 21 = (16 \oplus 3) \oplus (16 \oplus 5) = 3 \oplus 5 = 6;$$

podemos calcular $3 \oplus 5 = (2 \oplus 1) \oplus (4 \oplus 1) = 2 \oplus 4 = 6$ (usamos várias vezes $2^k \oplus P = 2^k + P$ se $P < 2^k$, $P, k \in \mathbf{Z}^+$).

No filme *O ano passado em Marienbad* o jogo aparece várias vezes com cartas de baralho no lugar de pontos ou palitos, iniciando-se com a combinação 7, 5, 3, 1, que é uma combinação segura porque

$$1 \oplus 3 \oplus 5 \oplus 7 = 2 \oplus 5 \oplus 7 = 2 \oplus (4 \oplus 1) \oplus (4 \oplus 3) = 2 \oplus 1 \oplus 3 = 0,$$

ou porque na base 2 temos

$$\begin{array}{ccr}
7 & : & 111 \\
5 & : & 101 \\
3 & : & 11 \\
1 & : & 1 \\
\hline
 & & 224.
\end{array}$$

O jogo de Euclides

João Bosco Pitombeira

O momento ideal para aplicação desta atividade é durante o estudo do máximo divisor comum, embora possa ser utilizada para reforço dos cálculos aritméticos. A compreensão do algoritmo de Euclides para determinação do MDC é a inspiração para o jogo. Pode-se, depois da compreensão do jogo, propor perguntas do tipo: Sempre se chegará ao zero? Se um dos números é zero, o outro será o quê?

Quando o aluno perceber que a resposta a essa última questão é "o MDC do par inicial", ele ficará curioso para compreender o processo. Então é interessante salientar a proximidade com o algoritmo de Euclides.

Descrição do jogo

São dois os jogadores – cada um escolhe, secretamente, um número natural não-nulo. Suponhamos que um jogador escolheu o número 31, e o outro jogador, o número 7. Um dos jogadores é sorteado para iniciar o jogo. Ele receberá o número escolhido pelo colega e deverá subtrair do maior número, 31, um múltiplo não-nulo do menor, ($k7 = 7$, 14, 21 ou 28) de modo que o resultado ainda seja positivo. O segundo jogador receberá o novo par de números $31 - k7$, 7 e repetirá o processo, subtraindo do maior número um múltiplo do menor, e assim por diante.

Ganhará o jogo quem obtiver primeiro o número 0.

Especificando: os números escolhidos são 31 e 7. O 1º jogador poderá devolver para o colega os pares de números:

7 e $31 - 7 = 24$;

7 e $31 - 14 = 17$;

7 e $31 - 21 = 10$ ou

e $31 - 28 = 3$.

Suponhamos que ele devolva o par 7 e 10.

Nesse caso, o segundo jogador só terá uma alternativa: responder com o par de números 7 e 3.

Será a vez, novamente, do primeiro jogador que poderá escolher: 3 e 4 ou 3 e 1.

Se jogar {3, 1}, o segundo jogador jogará {1, 0} e será o vencedor.

Se jogar {3, 4}, o segundo jogador será obrigado a jogar {3,1} e, na jogada seguinte, o primeiro jogador ganhará o jogo.

Euclides?

Não é difícil ver, e o professor pode chamar a atenção dos alunos para esse fato, que o jogo termina com o par $\{n, 0\}$, onde n é o maior divisor comum dos dois números escolhidos inicialmente.

De fato, se denotarmos por a e b os números escolhidos e um número dividir a e b, este número também dividirá $a - kb$ e b. Reciprocamente, se um número dividir $a - kb$ e b, este número também dividirá a e b. Portanto, os divisores comuns de a e b e os de $a - kb$ e b são os mesmos e, conseqüentemente,

$$\text{MDC}\,(a,b) = \text{MDC}\,(a - kb,\ b) = \dots = \text{MDC}\,(n,\ 0) = n.$$

Também não é difícil ver por que o jogo se chama *jogo de Euclides* – basta observar o algoritmo de Euclides para o cálculo do maior divisor comum de dois números:

	4	**2**	**3**
31	**7**	**3**	**1**
3	**1**	**0**	

onde, em cada passagem, do maior número subtrai-se um múltiplo do menor (no jogo, esse múltiplo não é necessariamente o maior possível).

A estratégia para ganhar

Como foi feito, para o jogo do NIM, apresentaremos resultados matemáticos do jogo de Euclides, o que permitirão dizer quem vencerá o jogo, caso ambos os jogadores joguem corretamente.

Surpreendentemente aparecerá o número áureo

$$r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618,$$

e o seu papel será decisivo para definir o vencedor do jogo – um jogo que só envolve números inteiros! (Esse número r aparece ao dividirmos um segmento na razão áurea, ao estudarmos os números de Fibonacci, e em outras partes da Matemática.)

Nomenclatura

Dado um par $\{a, b\}$, com $a > b$, os pares $\{a - b, b\}$, $\{a - 2b, b\}$, ..., $\{a - qb, b\}$, com $a - qb \geq 0$, chamam-se *pares derivados de* $\{a, b\}$. Assim, $\{24,7\}$, $\{17,7\}$, $\{10,7\}$, $\{3,7\}$ são os pares derivados de $\{31,7\}$.

Se $a - qb \geq 0$ e $a - (q + 1)b < 0$, $\{a - qb, b\}$ chama-se *par derivado mínimo* de $\{a, b\}$. No exemplo, $\{3,7\}$ é o par derivado mínimo de $\{31,7\}$. Observe que, dentre todos os pares derivados de um par $\{a, b\}$, com $a > b$, os números do par derivado mínimo são b e o resto da divisão de a por b.

Se $\{a - qb, b\}$ for o par derivado mínimo, diremos que o par $\{a - (q - 1)b, b\}$ *é o par anterior ao par derivado mínimo.*

Observe, mais uma vez, o exemplo. Dado o par $\{31,7\}$, o 1º jogador tem apenas duas opções significativas:

- ele escolhe o par derivado mínimo $\{3, 7\}$;

ou

- ele escolhe o par anterior ao par derivado mínimo, isto é, $\{10, 7\}$, obrigando o adversário a jogar $\{3, 7\}$.

Qualquer outra escolha daria estas mesmas duas opções ao adversário.

Qual das duas é a melhor?

É possível provar que se um jogador receber um par de números $\{a, b\}$ com,

$$1 < \frac{a}{b} < r$$

naquela jogada ele não poderá ganhar o jogo e terá como única opção devolver o par

$$\frac{b}{a-b} > r.$$

$\{a - b, b\}$ que tem a razão

Portanto é sempre vantajoso para um jogador escolher aquele par cuja razão é menor do que 2 e passá-lo ao adversário. Este, na sua vez, não ganhará o jogo e será obrigado a devolver um par com razão maior do que 2.

E, agora, o fato decisivo:

Se um jogador receber um par $\{a, b\}$ com $\dfrac{a}{b} > 2 > r$

ele terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória, pois poderá sempre impedir que o adversário ganhe o jogo no lance seguinte. Como o jogo tem um número finito de lances, necessariamente haverá uma vez em que o jogador receberá um par de números com um número múltiplo do outro, o que lhe dará a vitória.

Em resumo: Se o jogo começar com um par $\{a, b\}$ com $a > b$, o primeiro jogador terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória se e somente se

$$\frac{a}{b} > r$$

ou se a e b forem iguais. Nos casos restantes, o segundo jogador é quem terá uma estratégia que lhe garantirá a vitória.

Jogos de Sperner

Jaime Poniachik

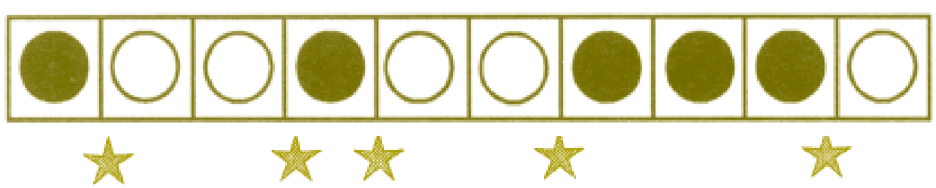
Argentina

Este jogo de fichas brancas e pretas pode ser utilizado desde a 5ª série para incentivar contagem e identificação de números pares e ímpares.

Pode-se levar os alunos a discutirem estratégias de vitória e possíveis generalizações do jogo são apresentadas.

1. Impactos

Em uma tira com n casas, dois jogadores alternam-se, colocando nas casas uma ficha de cada vez. Um coloca fichas brancas, o outro, pretas, sempre em casas que estiverem vazias. A partida acaba quando não existirem mais casas vazias. Contam-se, então, os "impactos". Há impacto quando duas casas vizinhas tiverem fichas de cores distintas. Se, no final, a quantidade de impactos for ímpar, o Branco ganha a partida; se for par, ganha o Preto. O diagrama mostra uma partida terminada. Os impactos estão marcados com estrelas. Houve 5 impactos. Branco ganhou.



O Branco começa. Qual é a estratégia vencedora?

Resposta

O jogo dos impactos não é mais do que a apresentação lúdica de um resultado matemático bastante conhecido, o "Lema de Sperner", aplicado, em nosso caso, a um segmento. Diz o lema:

Em um segmento, dividido em segmentos menores, marcamos o extremo esquerdo com 0, o direito com 1 e cada ponto de divisão intermediá rio com 0 ou 1. Dizemos que um segmento é “bom”, se os seus extremos estiverem marcados com números distintos.

a) Demonstra-se que o número de segmentos bons é ímpar.

b) Demonstra-se que os segmentos bons do tipo (0, 1) são um a mais do que os segmentos bons do tipo (1, 0).

A demonstração é muito simples e engenhosa:

Contam-se os segmentos bons, indo da esquerda para a direita. O 1 que estiver mais à esquerda fecha o primeiro segmento bom que é do tipo (0, 1). O próximo segmento bom deverá ser do tipo (1, 0).

E, sucessivamente, os segmentos bons irão se alternando entre os de um e de outro tipo. O último será do tipo (0 1).

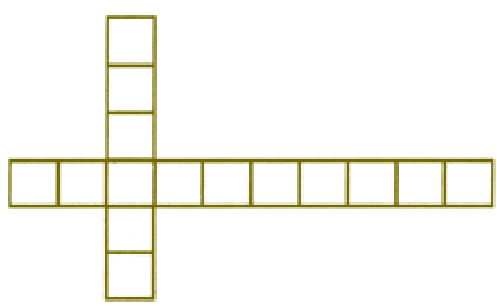
Daí concluí-se que a quantidade de segmentos bons é ímpar, e que há um segmento a mais do tipo (0,1) que o do tipo (1, 0).

Observações: Se os extremos do segmento inicial receberem ambos o mesmo rótulo, a quantidade de segmentos bons será par e haverá tantos segmentos de um tipo quanto do outro.

Voltemos ao jogo dos impactos. Para ganhar, o Branco apenas precisa assegurar que os extremos tenham fichas de cores distintas. Isso é fácil: ele joga fichas, à vontade, nas casas internas e, assim que o Preto colocar uma ficha em uma das extremidades, o Branco coloca sua ficha na outra extremidade.

2. Impactos em duas carreiras

As mesmas regras poderiam ser usadas em tabuleiros mais complexos. Por exemplo:



Qual é a estratégia para ganhar?

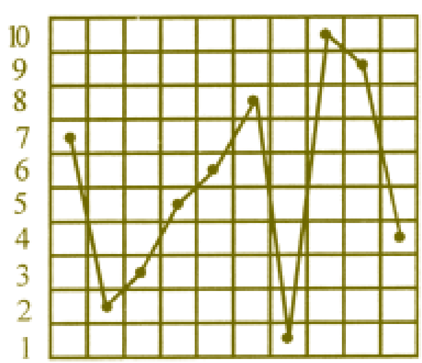
3. Corolário do lema de Spener

Uma linha contínua que começa subindo e termina descendo tem um número ímpar de extremos (máximos e mínimos).

4. Jogo do sobe-desce

Numa tira de n casas escrevem-se os números 1, 2, 3, ..., n da seguinte maneira: cada jogador escreve um número por vez numa casa livre, número que até então não tenha sido usado. A partida termina quando todas as casas estiverem preenchidas. Se resultar uma quantidade ímpar de extremos, a vitória será do primeiro jogador; se a quantidade for par, ganhará o segundo. O diagrama mostra uma partida acabada:

Jogando em um tabuleiro quadriculado, a partida anterior ficaria assim:

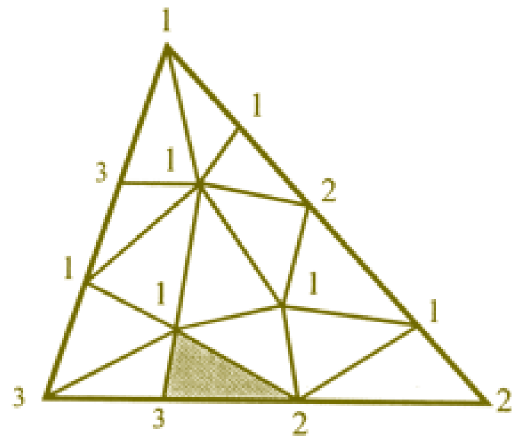


Qual a estratégia para ganhar?

5. Notícia histórica

O Lema de Spener completo refere-se à triangulação de triângulos, equivalente ao que foi nossa segmentação de segmentos. Ele diz:

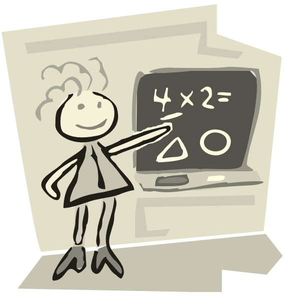
Um triângulo, cujos vértices estão marcados com os números 1, 2 e 3, é dividido em triângulos, e os novos vértices são numerados com esses três algarismos, respeitando a seguinte condição de fronteira: todo novo vértice que cair em um lado do triângulo maior levará um dos algarismos dos extremos desse lado. Demonstra-se que pelo menos um dos triângulos da partição está numerado com três algarismos distintos. E mais, o número total desses triângulos é ímpar.



A partição deve ser tal, que dois triângulos pequenos quaisquer ou não têm ponto comum, ou somente têm um vértice comum, ou têm um lado comum.

Emannuel Sperner (1905-1980) foi um matemático alemão, que em 1928 demonstrou o lema da partição do triângulo (e, em geral, do simplexo n-dimensional). Um lema é, em Matemática, uma proposição simples que antecede um teorema. O de Sperner antecede o teorema do ponto fixo.

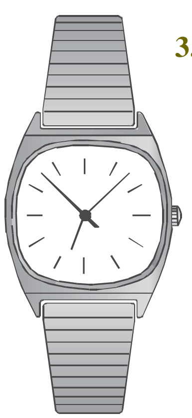
(Para maiores detalhes e extensões veja Yu Shashkin. *Pontos fixos*. Editora Mei, Moscou, 1991.)



...probleminhas da seção PROBLEMAS

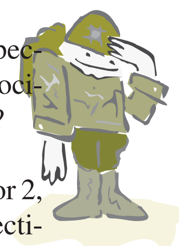
1. Um senhor de idade deixou o seguinte testamento:
"Deixo 1/3 da minha fortuna para minha única filha e o restante para a criança que ela está esperando, se for homem; deixo 1/2 da minha fortuna para minha única filha e o restante para a criança que ela está esperando, se for mulher."
Após sua morte nascem gêmeos: um casal. Como deve ser dividida a fortuna?

2. Eu tenho três bolas: *A*, *B* e *C*. Pintei uma de vermelho, uma de branco e outra de azul, não necessariamente nesta ordem. Somente *uma* das seguintes afirmações é verdadeira:
A é vermelha
B não é vermelha
C não é azul
Qual é a cor de cada bola?



3. "Embora eu esteja certo de que meu relógio está adiantado 5 minutos, ele está na realidade, com 10 minutos de atraso. Por outro lado, o relógio do meu amigo está realmente 5 minutos adiantado. Nós marcamos um encontro às 10 horas e cada um de nós planeja chegar pontualmente e em cima da hora. Quem chegará em primeiro lugar? Depois de quanto tempo chegará o outro?

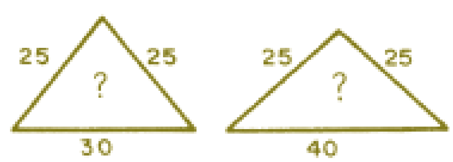
4. Pedro e Paulo apostam uma corrida:
Pedro corre a metade do tempo e anda a outra metade.
Paulo corre a metade da distância e anda a outra metade.
Se ambos correm e andam, respectivamente, com as mesmas velocidades, quem chegará primeiro?



5. Qual é o número que dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 tem para resto, respectivamente 1, 2, 3, 4 e 5?

6. Numa família, cada filha (moça) tem o mesmo número de irmãos e irmãs e cada filho homem tem duas vezes mais irmãs do que irmãos. Quantas filhas (moças) e filhos (homens) há nesta família?

7. Qual é a área maior?



8. A média das idades dos elementos de uma equipe de uma feira de ciências é 14,625. Qual é o menor número de elementos que podem constituir a equipe?

9. No Jardim dos Números, os algarismos *a* e *b* passeavam a uma velocidade constante. Às 14:00 h já tinham percorrido ***ab*** metros, às 14:42 h ***ba*** metros e às 15:00 h ***a*0*b*** metros. Sabendo que no número *a*0*b* o algarismo das dezenas é zero, mas o das centenas não, a que horas começou o passeio?

10. Um destacamento de soldados precisa atravessar um rio muito profundo e sem pontes. Eles pedem ajuda a dois meninos que estão passando pelo rio num barco. Porém, o barco é tão pequeno que nele só cabem os dois meninos ou um soldado de cada vez. Como eles fizeram para todos os soldados atravessarem o rio?

11. Num círculo formado por 10 pessoas cada pessoa escolhe um número e revela esse número aos seus vizinhos no círculo. Cada pessoa diz em voz alta a soma dos números dos seus 2 vizinhos. A figura mostra os números ditos em voz alta. Qual foi o número escolhido pela pessoa que disse o número 7?

12. Num hotel para cães e gatos 10% dos cães julgam que são gatos e 10% dos gatos julgam que são cães. Após cuidadosas observações conclui-se que 20% de todos os hóspedes pensam que são gatos e que os restantes pensam que são cães. Se no hotel estão hospedados 10 gatos, quantos são os cães hospedados?

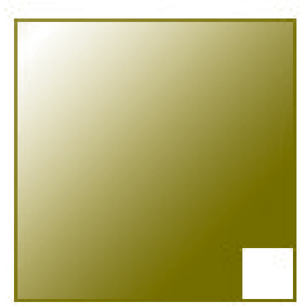
13. No ano que vem fevereiro terá cinco domingos. Qual foi o ano em que isso aconteceu pela última vez?

14. Num cercado pintinhos estão perseguindo besouros de 6 patas. Se o total de patas no cercado é 140, as quantidades dos besouros e dos pintinhos são dadas por números primos e há pelo menos um besouro para cada pintinho, quantos são os besouros?

15. Em um torneio de tênis participam *n* jogadores. Todos os jogos são entre dois jogadores e todos são eliminatórios. Quantas partidas serão jogadas até ser definido o campeão?

16. Calcule, sem usar calculadora, a área sombreada, sendo:
$a = 0{,}8667899776$
e $b = 0{,}1332100224$.

a



b

17. O produto de dois números que não são primos entre si é 6 435. Qual é o máximo divisor comum desses dois números?

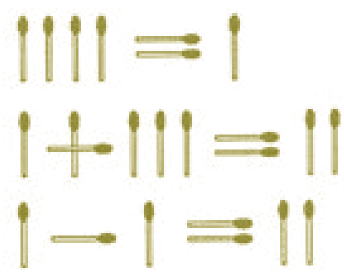
18. O Asterix e o seu companheiro Obelix estão a explorar um país muito pequeno no qual apenas existe uma estrada (em linha reta) que liga as três cidades que pretendem visitar: *Amix*, *Berlix* e *Celtix*. Ao chegarem à cidade de *Amix* avistam dois sinais com as seguintes indicações: "*Berlix* 5 km" e "*Celtix* 7 km". Caminham mais alguns quilômetros e chegam a *Berlix*, onde, com espanto, Obelix encontra dois sinais com as indicações: "*Amix* 4 km" e "*Celtix* 6 km". Ao comentar com Asterix o sucedido, este responde-lhe: "Não te preocupes! Sabe-se que numa das cidades todos os sinais têm indicações erradas, noutra todas as indicações são corretas e na outra uma indicação é correta e a outra errada". Por fim, ao chegarem a *Celtix* avistam mais dois sinais: "*Amix* 7 km" e "*Berlix* 3 km". Quais são as verdadeiras distâncias entre as três cidades?

19. Joaquim deve transportar alguns sacos para um depósito, recebendo R$ 0,20 por quilo transportado. Os sacos podem pesar 30, 40 ou 50 kg, e ele demora 8, 12 ou 20 minutos para transportá-los, respectivamente. Qual é a quantia máxima que o Joaquim poderá ganhar em exatamente uma hora de trabalho?

20. Para fazer de cabeça: Se uma garrafa e a sua tampa custam R$110,00 e a garrafa custa R$100,00 a mais que a tampa, quanto custa a tampa?

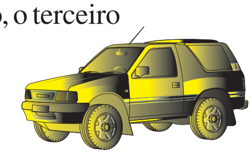
21. Três atletas disputavam o melhor tempo para uma corrida de 100 metros. Enquanto um corria, outro cronometrava. No final, o cronômetro de Marcelo registrava 10,7 segundos, o de Roberto, 10,8 segundos e o de Eduardo, 10,9 segundos. Eduardo deu os parabéns ao vencedor. Qual foi a classificação?

22. Redesenhar as figuras ao lado, mexendo apenas um palito, para tornar corretas as igualdades.



23. Vovó tem 17 netos entre meninos e meninas. Dos meninos, 4/9 têm olhos azuis. Quantas são as meninas?

24. Quando passeavam numa cidade, três estudantes de Matemática observaram que o condutor de um automóvel infringiu o código de estrada. Nenhum dos estudantes se recordava do número de matrícula (que tinha quatro algarismos), mas cada um deles notou uma particularidade de tal número. Um deles notou que os dois primeiros algarismos eram iguais. O segundo reparou que também os dois últimos eram iguais. E, por último, o terceiro



garantia que o número de matrícula era um quadrado perfeito.
É possível determinar o número de matrícula do automóvel conhecendo-se apenas esses dados? Justifique sua resposta.

25. Antônio e Bento, dois gêmeos, seguiam o leito de uma ferrovia e começaram a atravessar uma ponte estreita na qual havia espaço apenas para o trem. No momento em que completavam $2/5$ do percurso da ponte, ouviram o trem que se aproximava por trás deles. Antônio começou a correr de encontro ao trem, saindo da ponte praticamente no instante em que o trem entrava. Bento correu no sentido oposto a Antônio, conseguindo sair da ponte praticamente no instante em que o trem saía. Quando os irmãos se reencontraram, passado o sufoco, o irmão que gostava de Matemática (o outro amava) observou:
Corremos à velocidade de 15 *km por hora, e portanto já sei calcular a velocidade do trem!*
Calcule a velocidade do trem. Justifique sua resposta!

26. Determine o número fantasma de seis algarismos que está escondido na última linha. Nas outras linhas há também números de seis algarismos e ao lado de cada um deles está anotado quantos algarismos há em comum com o número fantasma: são B (bom) se estão colocados na mesma posição no número fantasma e R (regular) se estão no número fantasma, mas em posição diferente.

	B	R
1 3 5 2 4 6	2	0
5 7 9 6 8 0	2	2
2 6 0 4 8 1	2	2
	6	0

27. Encontre o menor número $ABCDEF$, formado pelos algarismos $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, sem repetição, tal que o número AB seja divisível por B, o número BC seja divisível por C, CD seja divisível por D, DE seja divisível por E, e EF seja divisível por F.

28. Qual é a altura do gigante, sabendo-se que a sua cabeça mede 30 cm de comprimento, incluindo naturalmente o pescoço. As pernas são duas vezes mais compridas que a cabeça e seu meio tronco, e o sujeito todo é um metro mais comprido que a cabeça e as pernas juntas.

29. Como o médico me recomendou caminhadas, todo dia de manhã dou uma volta (com velocidade constante) na quadra em que resido. Minha mulher aproveita para correr (com velocidade constante) em volta do quarteirão. Saímos juntos e chegamos juntos. Ela percorre a quadra no mesmo sentido que eu e me ultrapassa duas vezes durante o percurso. Se ela corresse no sentido contrário ao meu, quantas vezes ela cruzaria comigo?

30. Um industrial produz uma máquina que endereça 500 envelopes em 8 minutos. Ele deseja construir mais uma máquina de tal forma que ambas, operando juntas, endereçarão 500 envelopes em 2 minutos. Determine o tempo que a segunda máquina sozinha deve gastar para endereçar 500 envelopes.

Respostas dos problеminhas

1. 1/4 para a filha; 1/4 para a neta; 1/2 para o neto.

2. *A*: azul;
B: vermelha;
C: branca.

3. Meu amigo; depois de 20 minutos.

4. Pedro; ele percorre, correndo, mais do que a metade da distância.

5. 59 (chamando o número procurado de *n*, *n* + 1 será divisível por 2, 3, 4, 5 e 6).

6. 4 moças e 3 homens.

7. Altura do triângulo de base 30: 20; altura do triângulo de base 40: 15. As áreas são iguais.

8. 8.

9. 13:48 h.

10. O menino *A* fica na margem oposta á margem na qual estão os soldados e o menino *B* leva o barco até os soldados. O primeiro soldado atravessa o rio e o menino *A* traz o barco de volta. Os dois meninos atravessam o rio, o menino *A* fica, e o menino *B* leva novamente o barco até os soldados. O segundo soldado atravessa o rio e ...

11. 1.

12. 70.

13. 1976.

14. 19.

15. *n* – 1 jogadores devem ser eliminados, logo são necessárias *n* – 1 partidas.

16. 0,7335799552.

17. 3.

18. *Amix-Berlix*: 5 km
Berlix-Celtix: 2 km

19. R$ 44,00.

20. R$ 5,00.

21. 1º Roberto,
2º Eduardo,
3º Marcelo.

22. II – I = I ; I – III = – II e II – I = I.

23. 8.

24. Sim, é 7 744.

25. 75 km/h.

26. 170 289.

27. 361 524.

28. 2,9 m.

29. 4.

30. 8/3 min.