Capítulo 1

Álgebra

Professor de Matemática cria confusão em campeonato de futebol

Adaptado do artigo de
Manoel Henrique C. Botelho

Numa próspera cidade do interior de São Paulo, o prefeito, querendo justificar a necessidade de uma Secretaria de Esportes (dizia-se para poder nomear um primo de sua esposa), decidiu implantar um campeonato de futebol.

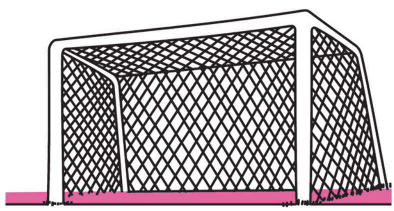
Como não tivesse infra-estrutura administrativa para organizar o torneio, solicitou ao colégio estadual da cidade que organizasse o evento, já que o colégio tinha dois professores de Educação Física. Ambos os professores aceitaram a incumbência, desde que os demais membros do corpo docente participassem. O fato é que algo de contagiante aconteceu, e todos os professores se empolgaram com o torneio.

A professora de Música adaptou um velho hino para o hino do torneio. A professora de Filosofia criou o código de ética do competidor e, como o professor de Matemática também queria colaborar, pediu-se para fazer o regulamento da escolha do vencedor.

Além de estabelecer os critérios gerais de classificação e desclassificação, era necessário também estabelecer o critério de desempate, em caso de dois times ficarem no final da disputa com o mesmo número de pontos ganhos. Era preciso, neste caso, um critério de decisão. Decidir por saldo de gols era perigoso, pois poderia haver uma "peruada à la argentina". Decidir por pênaltis era complicado, pela própria complexidade da cobrança, em face da famosa movimentação do goleiro antes de cobrar a falta ou da famosa paradinha criada pelo Rei Pelé, que só chuta depois que o goleiro se desloca para um lado. Como esses critérios são sempre passíveis de interpretação, e como tribunal de futebol de várzea costuma ser o tapa, decidiu-se adotar um critério muito usado em campeonatos estaduais e nacionais de futebol profissional: se, no final do campeonato, dois times estiverem com o mesmo número de pontos ganhos, o campeão será o time com maior número de vitórias. O professor de Matemática ouviu as recomendações, fez a minuta do regulamento e apresentou-o à Comissão Organizadora. Esta, por falta de tempo (eterna desculpa de nós brasileiros), aprovou tudo sem ler, em confiança!

O Campeonato começou e, no seu desenrolar, dois times se destacaram: o Heróis do Minho (que – dizem, mas nunca foi provado – era financiado por um português, dono da maior padaria do lugar), e o Flor da Mocidade, que representava um bairro pobre do arrabalde da cidade. Com o evoluir dos jogos, o Flor da Mocidade passou à frente, e só faltava um jogo no domingo. Para seu único rival, o Heróis do Minho, também só restava um jogo no sábado. Se o Flor da Mocidade vencesse no domingo, seria o campeão pelo maior número de vitórias, mesmo que o Heróis do Minho vencesse no sábado.

E foi o que deu. No sábado, o Heróis do Minho venceu. O estádio encheu, no domingo, para ver a última partida. Se o Flor da Mocidade empatasse ou perdesse, adeus título. Mas, se vencesse, então seria campeão por ter uma vitória a mais que o Heróis do Minho. No esperado domingo não deu outra. No fim do primeiro tempo o



Flor da Mocidade já vencia por três a zero o pobre time Íbis Paulista. Foi aí que o Presidente da Comissão leu o regulamento pela primeira vez. Não se sabe se por engano datilográfíco ou erro do professor de Matemática, o fato é que o regulamento dizia, claramente:

> "se dois times terminarem o campeonato com o mesmo número de pontos ganhos, será campeão o que tiver o maior número de derrotas".

Era isso o que estava escrito, em total desacordo com o combinado. No intervalo do jogo, o Presidente da Comissão pôs a boca no trombone e em cinco minutos todo o estádio, em efervescência, discutia o acontecido e o que iria acontecer em face de tão estranho e heterodoxo regulamento, que, aliás, não obedecia ao combinado.

Resumidamente, assim estavam os ânimos na arena, digo, no estádio:

–desespero no pessoal do Flor da Mocidade, pois mudara a regra do campeonato que, na versão tradicional, lhe garantiria o título;

–alegria no pessoal dos Heróis do Minho, que via uma chance de ser campeão ou de, no mínimo, "melar" o campeonato.

Para resolver esse imbróglio matemático, foi chamado o responsável (ou seria irresponsável?), o professor de Matemática, que felizmente morava perto do estádio.

O professor de Matemática, com uma comissão de alunos, foi até o estádio, que fervia. Metade da torcida queria brigar, qualquer que fosse o resultado. Somente algumas pessoas cuidavam da análise da questão sem partidarismo. Enquanto o professor de Matemática não chegava, a professora de Filosofia, que pelo mestre de Álgebra não tinha simpatia, deu sua contribuição, jogando gasolina na fogueira ao declarar:

"É a primeira vez na história da humanidade que se declara vencedor quem mais perde. Na Grécia antiga, o perdedor era quase humilhado, e em Roma nós sabemos o que eles faziam aos gladiadores que perdiam. Não quero atacar o mestre de Matemática, mas ele criou um regulamento que é, no mínimo, anti-histórico."

Nessa hora chega, sereno, o professor de Matemática, que só aceita discutir o assunto numa sala, diante de um quadro-negro. No seu sagrado "hábitat" o mestre fez o quadro de resultados:

	jogos	empates	vitórias	pontos	derrotas
Flor da Mocidade	14	4	7	18	3
Heróis	14	6	6	18	2

O professor de Matemática explicou:

–Quando dois times jogam o mesmo número de jogos e resultam com o mesmo número de pontos ganhos, obrigatoriamente, e sempre, o time que tiver o maior número de vitórias terá o maior número de derrotas e reciprocamente.

Uma pessoa da Comissão Diretora –que estava com o jornal do dia e que dava a classificação dos times profissionais no Campeonato Brasileiro notou que o fato realmente acontecia. Ou seja, colocar no regulamento a escolha entre dois times com o mesmo número de jogos e o mesmo número de pontos ganhos, pelo critério de maior número de vitórias ou de maior número de derrotas, dá no mesmo.

Todos, ou os que puderam entender, concordaram e o Flor da Mocidade foi consagrado campeão, embora alguns, ou por não haverem entendido, ou por má-fé, dissessem que fora resultado de "tapetão" (resultado jurídico obtido fora do campo).

Passados uns meses, o professor de História perguntou ao professor de Matemática como ele percebera esse fato, correto, mas curioso, de que o campeão é o que mais perde, se comparado com o concorrente com o mesmo número de pontos ganhos. E ouviu a seguinte história, contada em sigilo:

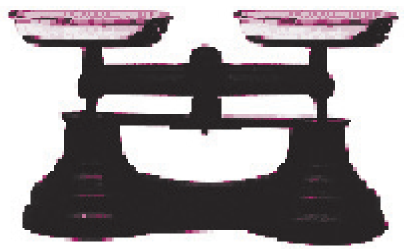
A linda filha do professor de Matemática, que estudava em uma universidade distante, chegou das férias com o coração partido e dividida. Estava perdidamente apaixonada por dois rapazes maravilhosos.

Um deles, Pedro, era jovem e de família de classe média em decadência (o "coitado" era também filho de professor) e o outro, Arthur, de rica e tradicional família pecuarista. A jovem estava dividida quanto a escolher entre um e outro, quando seu pai a orientou:

"Minha filha, para uma pessoa jovem como você, relacionar-se com pessoa desquitada e talvez até com um filho, é sempre um problema."

A menina, aturdida, perguntou ao pai como soube de tudo isso, se ela só conhecera Arthur há quinze dias e na cidade da sua universidade, distante, muito distante da cidade onde morava seu pai. Que seu pai era matemático e fazia raciocínios incríveis, quase dignos de bruxo (opinião dela), ela sabia, mas a Matemática permitiria descobrir problemas amorosos?

O pai respondeu com a simplicidade dos matemáticos:



"Usei o Princípio de Roberval, ou, como dizem os físicos, a Balança de Roberval, aquela de dois pratos iguais. Se você está apaixonada igualmente por duas excelentes pessoas, então os pratos da balança estão equilibrados. Se eles estão equilibrados e surge essa brutal diferença em favor de Arthur, que é o fato de ele ser rico, e isso é uma indiscutível vantagem, então Arthur deve ter, para não desequilibrar a balança, uma grande desvantagem. Como você disse que ele é uma boa pessoa, com boa probabilidade a única desvantagem que ele deve ter é ser desquitado, situação essa não ideal, pelo menos na opinião dos pais de uma moça solteira e tão jovem."

A filha do matemático ficou extasiada com a lógica dedutiva do pai. Anos depois o pai usou essa lógica no regulamento do campeonato. Se dois times empatam, o que tiver maior número de vitórias deve, obrigatoriamente, ter o maior número de derrotas.

Lógico, não?

Quanto perco com a inflação?

Adaptado do artigo de
Manoel Henrique Campos Botelho

Souzinha, apesar de viver em um país que há mais de quarenta anos tem inflação, ainda não conseguiu entendê-la.

Certo dia, falou-me:

–A inflação nos anos subseqüentes ao último aumento (melhor seria dizer reajuste) de salário foi de 8% e 7%. Já perdi com isso

$$8\% + 7\% = 15\% \text{ do meu salário.}$$

Corrigi:

–Não é 15%, é outro valor.

Souzinha respondeu:

–Já sei, já sei.O cálculo exato é

$1{,}08 \times 1{,}07 = 1{,}1556$, ou seja, 15,5%.

–Continua errado, insisti.

Souzinha bateu o pé e saiu murmurando baixinho, mas suficientemente alto para que eu pudesse ouvir:

– O Botelho não tem jeito, está sempre arrumando coisinhas para discutir.

Afinal, quem está certo, Souzinha ou eu?

Resposta

É claro que sou eu que estou certo e Souzinha está errado. Admitamos que Souzinha ganhasse 1000 reais e usasse essa quantia para comprar unicamente produtos de valor unitário 10 reais. Logo, ele compraria, inicialmente, um total de 100 produtos. Se a inflação foi de 8% no primeiro ano e de 7% no ano seguinte, o produto padrão que custava 10 passará a custar $10 \times 1{,}08 \times 1{,}07 = 11{,}556$.

Custando o objeto padrão 11,556 reais, e Souzinha continuando a ganhar 1000 reais, ele poderá comprar $\frac{1000}{11{,}556} \approx 86{,}5$. Logo, a redução da capacidade de compra terá sido de

$$\frac{100 - 86{,}5}{100} \approx 13{,}5\%.$$

Certo, Souzinha?

Assim, mesmo quando a inflação acumulada for de 100%, o nosso salário não some, mas nosso poder de compra cai 50%.

Vale para 1, 2, 3, ... Vale sempre?

Adaptado do artigo de
Renate Watanabe

*N*este artigo vamos fazer, inicialmente, algumas afirmações sobre números naturais que são verdadeiras para os números 1, 2, 3 e muitos outros e vamos tentar responder à pergunta: elas são verdadeiras sempre?

O objetivo do artigo é enriquecer o estoque de fatos e problemas interessantes que professores colecionam para usar em momentos oportunos nas aulas que ministram.

Verdadeiro ou falso?

Vamos verificar se as afirmações a seguir são verdadeiras ou falsas.

1. $\forall\ n \in N, n < 100$.
2. $\forall\ n \in N, n^2 + n + 41$ é um número primo.
3. $\forall\ n \in N^*, 991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito.
4. $\forall\ n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.
5. $\forall\ n \in IN^*, 2n + 2$ é a soma de dois números primos.

Vejamos:

1. "$n < 100$" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros, mas torna-se falsa para qualquer número natural maior do que 99.

   Portanto, "$\forall\, n \in IN,\ n < 100$" é uma sentença *falsa.*

2. "$n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e outros. De fato, ela é verdadeira para todos os números naturais menores do que 40.

   Porém o número $40^2 + 40 + 41 = 40 \,.\, (40 + 1) + 41 = 41^2$.

   41^2 não é primo, mostrando que a sentença

   "$\forall\, n \in N,\ n^2 + n + 41$ é um número primo" é uma *falsa.*

3. "$991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito", é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, mesmo após muitas e muitas tentativas, não se acha um número que a torne falsa.

   Pudera! O primeiro número natural n, para o qual $991n^2 + 1$ é um quadrado perfeito é um número de 29 algarismos:

   $$12\ 055\ 735\ 790\ 331\ 359\ 447\ 442\ 538\ 767$$

   e, portanto, a sentença

   "$\forall\, n \in N^*,\ 991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito", é *falsa.*

4. "A soma dos n primeiros números ímpares é n^2" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como no caso anterior, após muitas e muitas tentativas, não se acha um número natural que a torne falsa. Neste caso, tal número não existe, pois, como veremos adiante, esta sentença é *verdadeira sempre.*

5. "$2n + 2$ é a soma de dois números primos" é uma sentença verdadeira para $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e, como nos dois exemplos anteriores, após muitas e muitas tentativas, não se encontra um número natural que a

torne falsa. Mas agora temos uma situação nova: ninguém, até hoje, encontrou um número que tornasse a sentença falsa e ninguém, até hoje, sabe demonstrar que a sentença é verdadeira sempre.

A sentença é a famosa conjetura de Goldbach, feita em 1742, em uma carta dirigida a Euler: "Todo inteiro par, maior do que 2, é a soma de dois números primos". Não se sabe, até hoje, se esta sentença é verdadeira ou falsa.

Em suma, dada uma afirmação sobre números naturais, se encontrarmos um contra-exemplo, saberemos que a afirmação não é sempre verdadeira. E se não acharmos um contra-exemplo? Neste caso, suspeitando que a afirmação seja verdadeira sempre, uma possibilidade é tentar demonstrá-la, recorrendo ao princípio da indução.

Princípio da indução finita

"Seja S um conjunto de números naturais, com as seguintes propriedades:

1. $0 \in S$
2. se k é um natural e $k \in S$, então $k + 1 \in S$.

Nestas condições, $S = N$".

Vamos ver como esse princípio nos permite demonstrar que a sentença 4 é verdadeira.

"$\forall\, n \in N^*$, a soma dos n primeiros números ímpares é n^2."

Demonstração

Seja S o conjunto dos números naturais n para os quais a soma dos n primeiros números ímpares é n^2.

1. $1 \in S$, pois a soma do 1 primeiro número ímpar é $1 = 1^2$.
2. Vamos supor que $k \in S$, isto é, que a soma dos k primeiros números ímpares seja k^2.

Vamos provar que $k + 1 \in S$, isto é, que a soma dos $k + 1$ primeiros números ímpares é $(k + 1)^2$.

Estamos supondo que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$$

e queremos provar que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

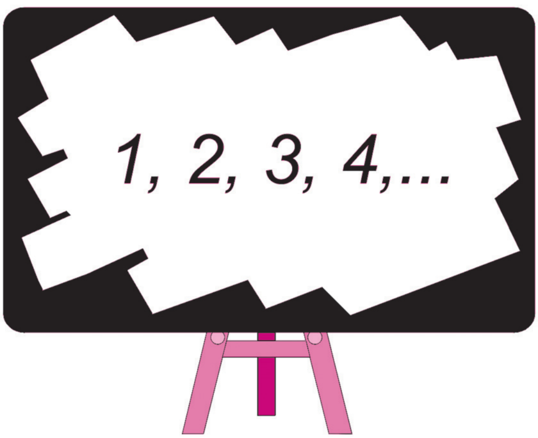
Basta observar que

$$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

O princípio da indução nos garante, agora, que $S = N^*$, ou seja, a afirmação "a soma dos n primeiros ímpares é n^2" é verdadeira para todos os números naturais maiores do que zero.

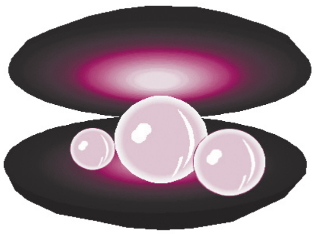
No ensino médio o professor encontra muitas outras oportunidades para fazer demonstrações por indução, se assim o desejar. Um aspecto importante é que os exemplos apresentados permitem ao professor mostrar aos alunos que fatos matemáticos podem ser verdadeiros para muitos exemplos e não serem verdadeiros sempre.

A única maneira de concluir a veracidade é fazer uma demonstração geral, que seja válida para qualquer caso, independentemente de exemplos.



Pérolas

Adaptado do artigo de
Paulo Ferreira Leite



Muitas histórias testemunham a extraordinária precocidade do matemático Gauss. Uma das favoritas refere-se a um episódio ocorrido quando ele tinha dez anos de idade e freqüentava o terceiro ano do ensino fundamental de uma escola onde medo e humilhação eram os principais ingredientes pedagógicos.

Na aula de Aritmética o professor pediu aos alunos que calculassem o valor da soma.

$$S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.$$

Uma excelente questão, sem dúvida, para aliviar o mestre de suas funções pelo resto da aula e manter bem alto o ideal pedagógico da escola.

Imediatamente após o problema ter sido proposto, Gauss escreveu o número 5050 em sua pequena lousa e a depositou, como era costume na época, sobre a mesa do professor. Durante o resto da aula, enquanto seus colegas trabalhavam, o pequeno Gauss foi, por diversas vezes, contemplado com o sarcástico olhar de seu mestre.

Ao fazer a correção, o estupefato Büttner – era esse o nome do professor –constatou que a única resposta correta era a de Gauss, que deu a seguinte justificativa para seu cálculo: a soma de

1 com 100, de 2 com 99, de 3 com 98, de 4 com 97, e assim por diante, é sempre o mesmo número 101. Ora, na soma desejada,

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 50 + 51 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100$$

este número aparece 50 vezes.

Portanto, o resultado desejado é $101 \times 50 = 5050$.

E esta multiplicação Gauss pôde fazer em poucos segundos.

Foi uma dura lição, mas o severo Büttner soube redimir-se, presenteando Gauss com o melhor livro de Aritmética que possuía e mudando totalmente sua atitude para com ele.

A observação feita por Gauss, de que é constante a soma dos termos eqüidistantes dos extremos na seqüência dos números de 1 a 100, continua válida para qualquer progressão aritmética e pode ser utilizada para deduzir a fórmula da soma dos termos de uma PA.

Progressão Aritmética – PA

Seja $(a_1, a_3, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão r.

Como $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_n + a_{1,}$

Chamando $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ tem-se

$$+\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2S_n &= (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \\ &= (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}.$$

No caso da soma 1 + 2 + ... + 100 temos

$$S = \frac{1+100}{2} \cdot 100 = 5050.$$

Um evento decisivo para a carreira de Gauss ocorreu no dia 30 de março de 1796, quando contava dezenove anos de idade. Nesse dia inaugurou o diário científico, que manteve por toda sua vida, registrando uma descoberta notável. Conseguira provar a possibilidade de, utilizando apenas régua e compasso, dividir uma circunferência em 17 partes iguais. Na realidade, esse enunciado é uma interpretação geométrica dos resultados algébricos que obtivera, mostrando ser possível resolver a equação $x^{17} - 1 = 0$, pela extração de sucessivas raízes quadradas. Essa descoberta fez com que ele que, até então dividira seu interesse entre a Filologia e a Matemática, optasse definitivamente pela última, muito embora mantendo um vivo interesse por Línguas e Literatura.

Carl Friedrich Gauss

Uma medida do apreço de Gauss por essa sua descoberta matemática é o seu pedido de que se gravasse em seu túmulo um polígono regular de 17 lados.

Para compensar o fato de não podermos descrever aqui as técnicas utilizadas por Gauss para provar seu teorema, reunimos algumas informações suplementares sobre o problema da ciclotomia, isto é, da divisão da circunferência em partes iguais (ver Quadro).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) é unanimemente considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos e sua obra, além de cobrir praticamente todos os ramos da Matemática, estende-se à Astronomia, Física e Geodésia. Era alemão (nasceu em Brunswick) e passou toda sua vida na Alemanha. Em 1807 foi nomeado professor e diretor do observatório astronômico de Göttingen. A partir dessa época, passou a residir no observatório onde, em razão do seu temperamento reservado, recebia poucas pessoas. Era perfeccionista, metódico e circunspeto, um perfeito contra-exemplo para o tradicional estereótipo do gênio matemático. Um dos poucos amigos que costumava receber era Georg Ribbentrop, um convicto e excêntrico solteirão, professor de direito em Göttingen. Conta-se que numa noite em que Ribbentrop jantava no observatório caiu forte tempestade e, prevendo as dificuldades que o amigo teria em regressar, Gauss insistiu para que ele ficasse para dormir. Num momento de descuido o hóspede desapareceu misteriosamente. Algum tempo depois bateram à porta e Gauss, atônito, recebeu de volta o amigo, ensopado dos pés a cabeça, mas trazendo seu pijama.

Ciclotomia

Ciclotomia = divisão da circunferência em partes iguais (divisão feita com régua e compasso).

Os geômetras gregos da Antiguidade, ~ 300 a.C., sabiam dividir a circunferência em n partes iguais para n de uma das seguintes formas:

$$2^k, \qquad 2^k.3, \qquad 2^k.5, \qquad 2^k.15.$$

Gauss, no seu livro DISQUISITIONES ARITHMETICAE, em 1801, provou o seguinte resultado:

"A divisão da circunferência em $n \geq 3$ partes iguais é possível se e somente se n é de uma das formas:

1) $n = 2^k$
2) $n = 2^k.p^1.p^2. \ldots . p^l$.

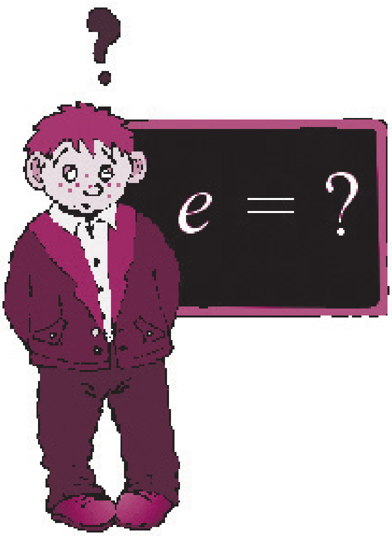
onde $p_1, p_2, \ldots, p_l$ são primos distintos, da forma $f^{-1}(33) = \frac{33+3}{2} = 18 = R$".

Estes números são chamados números de Fermat, em homenagem a Fermat, Pierre de (1601-1665) – matemático francês, que supunha que todos os números dessa forma fossem primos.

Com efeito, $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$ e $F_4 = 65537$ são primos, mas Euler, em 1732, mostrou que $F_5 = 641 \times 6700417$ e, portanto, é composto. Sabe-se hoje que muitos outros números de Fermat são compostos.

O número *e*, por quê?

Adaptado do artigo de
Elon Lages Lima



A noção de logaritmo quase sempre nos é apresentada, pela primeira vez, do seguinte modo: "o logaritmo de um número y na base a é o expoente x tal que $a^x = y$".

Segue-se a observação: "os números mais freqüentemente usados como base de um sistema de logaritmos são 10, e o número

$$e = 2{,}71828182\ldots\text{"};$$

o que nos deixa intrigados.

De saída, uma pergunta ingênua: esta regularidade na seqüência dos algarismos decimais desse número e persiste? Não. Apenas uma coincidência no começo. Um valor mais preciso seria $e = 2{,}718281828459\ldots$

Não se trata de uma fração decimal periódica. O número e é irracional, isto é, não pode ser obtido como quociente $e = p/q$ de dois inteiros. Mais ainda: é um irracional *transcendente*. Isto significa que não existe um polinômio $P(x)$ com coeficiente inteiros, que se anule para $x = e$, ou seja, que tenha e como raiz.

Por que então a escolha de um número tão estranho como base de logaritmos? O que faz esse número tão importante?

Talvez a resposta mais concisa seja que o número e é importante porque é inevitável. Surge espontaneamente em várias questões básicas.

Uma das razões pelas quais a Matemática é útil às Ciências em geral está no Cálculo (Diferencial e Integral), que estuda a variação das grandezas. Um tipo de variação dos mais simples e comumente encontrados é aquele em que o crescimento (ou decrescimento) da grandeza em cada instante é proporcional ao valor da grandeza naquele instante. Este tipo de variação ocorre, por exemplo, em questões de juros, crescimento populacional (de pessoas ou bactérias), desintegração radioativa, etc. Em todos os fenômenos dessa natureza, o número e aparece de modo natural e insubstituível. Vejamos um exemplo simples.

Suponhamos que eu empreste a alguém a quantia de 1real a juros de 100% ao ano. No final do ano, essa pessoa viria pagar-me e traria 2 reais: 1 que tomara emprestado e 1 dos juros. Isto seria justo? Não. O justo seria que eu recebesse e reais. Vejamos por que. Há um entendimento tácito nessas transações, de que os juros são proporcionais ao capital emprestado e ao tempo decorrido entre o empréstimo e o pagamento.

Assim, se meu cliente viesse me pagar seis meses depois do empréstimo, eu receberia apenas $1\frac{1}{2}$ reais. Mas isto quer dizer que, naquela ocasião, ele estava com $\frac{1}{2}$ real meu e ficou com esse dinheiro mais seis meses, à taxa de 100% ao ano; logo deveria pagar-me

$$1\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1\frac{1}{2}\right)=1\frac{1}{2}\times 1\frac{1}{2}=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \text{ reais no fim do ano.}$$

Isto me daria 2,25 reais, mas, mesmo assim, eu não acharia justo.

Eu poderia dividir o ano num número arbitrário n, de partes iguais.

Transcorrido o primeiro período de $\frac{\text{1ano}}{n}$, meu capital emprestado estaria valendo $1+\frac{1}{n}$ reais. No fim do segundo período de $\frac{\text{1ano}}{n}$, eu estaria $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$ reais, e assim por diante. No fim do ano eu deveria receber $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ reais. Mas, como posso fazer esse raciocínio para todo n, segue-se que o justo e exato valor que eu deveria receber pelo meu real emprestado seria

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

que aprendemos nos cursos de Cálculo ser igual ao número e. Um outro exemplo no qual o número e aparece.

As dízimas periódicas e a calculadora

Adaptado do artigo de
José Paulo Q. Carneiro

Em um concurso destinado principalmente a professores de Matemática, figurava a seguinte questão:

"Os números racionais *a* e *b* são, representados, no sistema decimal, pelas dízimas periódicas:

$$a = 3,0181818... = 3,0\overline{18} \quad \text{e}$$

$$b = 1,148148... = 1,\overline{148}.$$

Encontre, justificando, uma representação decimal de *a*–*b.*"

Como *a* e *b* são racionais, temos que a diferença $a - b$, também é racional e, portanto, sua representação decimal é periódica. Apesar de na prova ter sido permitido o uso da calculadora, o período jamais seria descoberto com a certeza exigida pelo "justifique". Além disso, o período poderia ser maior do que o número de dígitos que a calculadora pudesse exibir no visor.

Um primeiro expediente que poderia ocorrer seria fazer a subtração por meio do esquema usado habitualmente para decimais finitos. Isso funcionaria bem em casos mais simples.

Por exemplo:

$$\begin{array}{r} 0,444\ldots \\ -\ 0,333\ldots \\ \hline 0,111\ldots \end{array}, \text{ o que estaria correto, pois } \frac{4}{9}-\frac{3}{9}=\frac{1}{9}.$$

Mas, no caso em questão, o desencontro entre os períodos das duas dízimas apresentadas dificultava o emprego dessa estratégia (a qual, aliás, precisaria ser discutida em termos conceituais). Vejamos:

$$\begin{array}{r} 30,18181818\ldots \\ -\ 1,148148148\ldots \\ \hline ?? \end{array}$$

Como a subtração usual é feita da direita para a esquerda, não se sabe bem por onde se deveria começar, antes de descobrir o período. Por conseguinte, o caminho natural seria calcular as geratrizes de *a e b*, subtrair as frações correspondentes, e então encontrar uma representação decimal para essa fração. Utilizando esse procedimento, teríamos:

$10a = 30,\overline{18} \quad 1000a = 3018,\overline{18}$

logo, $1000a - 10a = 990\ a = 2988$, ou $a = 3 + \frac{18}{990}$.

$1000b = 1148,\overline{148} \quad 1000b - b = 999b = 1147$, ou $b = 1 + \frac{148}{999}$,

portanto, $a - b = 3 + \frac{18}{990} - (1 + \frac{148}{999}) = 1 + \frac{1292}{1485} = \frac{2777}{1485}$.

Nesse ponto, o método mais usado por todo o mundo é dividir 2777 por 1485 (ou 1292 por 1485, ganhando uma etapa), pelo algoritmo tradicional, e aguardar o primeiro resto que se repete. Desse modo, obtém-se:

$$
\begin{array}{cccccccccccc|l}
1 & 2 & 9 & 2 & 0 & & & & & & & & 1485 \\ \cline{13-13}
 & 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & & & & & & & 0{,}8700336 \\
 & & & & & 5 & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & & 5 & 4 & 5 & 0 & & & \\
 & & & & & & & 9 & 9 & 5 & 0 & & \\
 & & & & & & & & 1 & 0 & 4 & 0 &
\end{array}
$$

Como se repetiu o resto 1040, a partir daí, os algarismos $7, 0, 0, 3, 3, 6$ se repetiriam. Logo, $a - b = 1{,}8\overline{700336}$.

Vamos agora fazer alguns comentários:

1. Algumas pessoas envolvidas no processo de aprendizagem da Matemática (alunos, professores, pais, etc.) expressam às vezes a crença de que, com o advento da calculadora, nunca mais haverá ocasião de usar o algoritmo tradicional da divisão. Alguns até usam isso como um argumento para proibir o uso da calculadora em certas fases iniciais da aprendizagem: “é necessário primeiro que o aluno aprenda o algoritmo tradicional, e só depois lhe será permitido usar a calculadora; senão, ele não terá motivação para aprender tal algoritmo”.

   Na realidade, o exemplo aqui tratado mostra que nós, professores, temos que exercer nossa criatividade para criar problemas desafiadores, que coloquem em xeque até mesmo a calculadora, deixando claras as suas limitações, em vez de proibir o seu uso, o que é uma atitude antipática, repressora, e totalmente contrária ao que um aluno espera de um professor de Matemática. De fato, para um leigo, ou um iniciante em Matemática, nada mais “matemático” do que uma calculadora, e ele espera que um professor vá iniciá-lo ou ajudá-lo com essa ferramenta, e não proibi-lo de usá-la.

2. Existiria um outro método para encontrar uma representação decimal de $\dfrac{208}{297}$ (ou de $\dfrac{1292}{1485}$, mas já vimos que basta o primeiro), que não fosse o algoritmo tradicional da divisão? A resposta é sim.

Basta tomar as sucessivas potências de 10, a saber: 10, 100, etc., até que encontremos uma que deixe resto 1, quando dividida por 297. Não é difícil fazer isso, experimentando com a calculadora:

$10^3 = 3 \times 297 + 109$ $\quad 10^4 = 33 \times 297 + 199 \quad 10^5 = 336 \times 297 + 208$

$10^6 = 3367 \times 297 + 1.$

A partir daí, obtém-se: $\dfrac{1}{297} = 3367 \times \dfrac{1}{10^6 - 1}$, e portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{208}{297} &= 208 \times 3367 \times \frac{1}{10^6 - 1} \\
&= 700336 \times \frac{1/10^6}{1 - 1/10^6} = \frac{700336}{10^6}\left(1 - \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^{12}} + \cdots\right) \\
&= 0{,}700336700336700336\ldots = 0{,}\overline{700336}
\end{aligned}$$

em que a última passagem vem da propriedade das progressões geométricas infinitas: $1 + q + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}, -1 < q < 1.$

Observe que o período da dízima tem comprimento 6, que é o expoente da menor potência de 10 que deixa resto 1, quando dividida por 297.

Considerações finais

Observemos que toda fração decimal finita como 0,125, por exemplo, é gerada por uma fração cujo denominador é uma potência de 10:

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{125}{10^3} = \frac{125}{2^3 \times 5^3}.$$

Por outro lado, uma fração cujo denominador não tem outros fatores primos além do 2 e do 5 (poderia ser um deles apenas) sempre pode ser expressa por uma fração cujo denominador é uma potência de 10 e, portanto, tem uma representação decimal finita. Por exemplo,

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5} = \frac{3 \times 5}{2^2 \times 5^2} = \frac{15}{10^2} = 0{,}15.$$

Esse raciocínio permite concluir que uma fração a/b, na forma irredutível, tem representação decimal infinita se, e somente se, $b = b_0 \times 2^m \times 5^n$, com $b_0 > 1$, m, $n > 0$ e $mdc\,(b_0, 10) = 1$.

Isso posto, podem-se provar os seguintes resultados:

(a) a representação decimal de a/b é periódica e pode apresentar ou não pré-período de tamanho $r = \max\{m, n\}$ algarismos (por exemplo, 0,356212121... tem pré-período de três algarismos, 3, 5 e 6);

(b) se $m > 0$ ou $n > 0$, então há um pré-período formado de $r = \max\{m, n\}$ algarismos;

(c) o período é formado de h algarismos, sendo h o menor inteiro positivo tal que $10^h - 1$ é múltiplo de b_0 (uma generalização da propriedade conhecida como *teorema de Euler* [1760] garante a existência de h).

Por exemplo:

- 5/21 não tem pré-período, pois $21 = 3 \times 7$ (notar a ausência de 2 e 5) e o período é formado de 6 algarismos, uma vez que

  $10^2 - 1 = 99$, $10^3 - 1 = 999$, $10^4 - 1 = 9999$ e $10^5 - 1 = 99999$ não são múltiplos de 21, mas

  $$10^6 - 1 = 999999 = 21 \times 47619.$$

  De fato,

  $$5/21 = 0{,}238095238095\ldots = 0{,}\overline{238095}.$$

- 9/140 tem pré-período formado de 2 algarismos (observar que $140 = 2^2 \times 5 \times 7$ e que $\max\{2, 1\} = 2$) e período formado de 6 algarismos, pois 6 é o menor expoente tal que $10^6 - 1$ é múltiplo de 7. De fato,

  $$9/140 = 0{,}0642857428571\ldots = 0{,}06\overline{428571}.$$

É possível construir um triângulo cujos lados estejam em PG de razão q?

Adaptado do artigo de
Paulo A. da Mata Machado

A resposta é: depende da razão, q, da progressão. Se, por exemplo, $q = 1$, temos o triângulo eqüilátero. Se $q = 1{,}25$, temos os triângulos de ângulos internos $87{,}22°$, $53{,}04°$ e $39{,}74°$. Se, porém, $q = 2$, não há solução.

Como se chega a essa conclusão? Muito simples. Podemos, colocando os lados do triângulo em ordem crescente e considerando um triângulo semelhante, admitir que a solução seja um triângulo de lados 1, q e q^2, sendo $q \geq 1$. Em um triângulo, um lado é menor que a soma dos outros dois, portanto, $q^2 - q - 1 < 0$.

As raízes da equação $q^2 - q - 1 = 0$ são $\dfrac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$, logo $q^2 - q - 1 < 0$ para

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Como estamos considerando apenas as razões maiores ou iguais a 1, temos $1 \leq q < \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. (1)

Determinado o intervalo de variação de q, vamos determinar quais são os ângulos internos do triângulo, usando a lei dos cossenos,

$$q^2 = 1 + q^4 - 2q^2 \cos\alpha,$$

sendo α o ângulo interno formado pelo maior e pelo menor lado do triângulo. Rearranjando a equação, obtemos: $\cos\alpha = \dfrac{q^4 - q^2 + 1}{2q^2}$. (2)

Dado q, podemos determinar qual será o ângulo entre o menor e o maior lado do triângulo pela equação (2). Esse ângulo tem também uma limitação de valores. Para determinarmos qual é essa limitação, vamos reescrever a equação da seguinte forma:

$$q^4 - (2\cos\alpha + 1)q^2 + 1 = 0.$$

Temos uma equação bi-quadrada que somente terá solução se

$$4\cos^2\alpha + 4\cos\alpha - 3 \geq 0 \quad \text{, ou}$$

equivalentemente, $\cos\alpha \geq 1/2$. Como trata-se de um ângulo de triângulo, α não pode ser maior que 90° e, portanto, $\alpha \leq 60^o$.

Há um caso particular que ainda não foi discutido. Quais são os ângulos internos de um triângulo retângulo cujos lados estejam em progressão geométrica, e qual é a razão dessa progressão?

Para triângulo retângulo, podemos usar o teorema de Pitágoras:

$q^4 = q^2 + 1$ ou $q^4 - q^2 - 1 = 0$, cuja solução, no intervalo obtido em (1), é $q = \sqrt{\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}}$.

Aplicando o valor de q na equação (2), obtém-se

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \quad \text{ou} \quad \alpha = 51{,}83°.$$

Consequentemente, os ângulos internos do triângulo retângulo que tem os lados em progressão geométrica são: 90°, 51,83° e 38,17°.

A solução de Tartaglia para a equação do terceiro grau

Adaptado do artigo de
César Polcino Milies

Niccolò Fontana (Tartaglia)

Introdução

A história da resolução da equação de terceiro grau é muito pitoresca, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores.

Uma das personagens dessa história é Niccolò Fontana (1500-1557 aproximadamente). Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal, sua mãe buscou refúgio para o filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de Tartaglia (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido. Ele não foi o primeiro a obter o método de resolução das equações do terceiro grau. Scipione del Ferro (1465-1562 aproximadamente) –que foi professor na Universidade de Bolonha e cuja biografia é pouco conhecida –foi o verdadeiro descobridor. Antes de morrer, del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, Annibale delia Nave – seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha – e António Maria Fior (ou Floridus, em latim).

Em 1535 houve uma disputa matemática entre Fior e Tartaglia. Tais confrontos intelectuais eram freqüentes na época e, muitas vezes, a permanência de um matemático numa cátedra dependia de seu bom desempenho nesses encontros. Cada um dos adversários propôs ao outro trinta problemas, e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Tartaglia preparou questões variadas, mas todos os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo

$$x^3 + ax = b.$$

Precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações e, na hora do confronto, verificou-se que Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este não tinha conseguido resolver a maioria das questões submetidas por Tartaglia. Declarado vencedor, Tartaglia voluntariamente renunciou aos trinta banquetes.

A notícia do triunfo de Tartaglia logo se espalhou e chegou aos ouvidos de Girolamo Cardano (1501-1576), que, na época, ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. De todos as personagens da nossa história, talvez seja Cardano o mais enigmático, aquele cuja vida foi mais pitoresca e, certamente, que teve uma formação mais universal.

Para termos uma idéia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643:

> *Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as*

ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isso é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava.

Por outro lado, Naudé é bem mais crítico quanto à vida pessoal e características de personalidade de Cardano, distorcendo-as até o patológico. Foram essas opiniões de Naudé, amplamente divulgadas no prefácio das obras de Cardano, que deram origem à visão distorcida que as futuras gerações tiveram sobre seu caráter.

Girolano Cardano

Na época da descoberta de Tartaglia, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convidou a sua casa, com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que Tartaglia tinha feito também algumas descobertas sobre tiro e fortificações –e esperava obter disso algum benefício. Uma vez lá, com muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau.

Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução (embora não lhe ensinasse a demonstração da mesma), sob forma de versos, em troca do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou –e achou –uma demonstração que o justificasse. Mais ainda, ele estimulou seu secretário e discípulo Ludovico (Luigi) Ferrari (1522-1565) a trabalhar com a equação de quarto grau e este achou o correspondente método de resolução com a devida demonstração.

De posse de ambas as soluções, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las. Em 1544, mestre e discípulo realizaram uma viagem a Florença e, no caminho, fizeram uma visita a Annibale delia Nave, em Bologna. De acordo com um relato de Ferrari, este lhes mostrou um manuscrito de del Ferro, que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg, uma obra intitulada *Ars Magna,* que o tornou verdadeiramente famoso em todo o continente. Nas palavras de C. Boyer, "ele provavelmente era o matemático mais competente da Europa". Nessa obra aparecem, pela primeira vez, as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus. A seu favor, podemos dizer que Cardano não esquece de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

A seguir, faremos uma análise do método que Tartaglia confiou a Cardano.

Os versos de Tartaglia

Como dissemos acima, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta, por meio de versos. Tal idéia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia.

A seguir, reproduzimos uma tradução para o português dos versos transcritos na página 120, da edição de 1554, dos *Quesiti*:

1. *Quando o cubo com a coisa em apreço*
Se igualam a qualquer número discreto,
Acha dois outros diferentes nisso

2. *Depois terás isto por consenso*
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo

3. *Depois, o resíduo geral*
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal.

4. *Na segunda destas operações,*
Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções

5. *Do número farás dois, de tal forma*
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa.

6. *Depois, por um preceito comum*
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito

7. *Depois, a terceira destas nossas contas*
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas

8. *Isto eu achei, e não com passo tardo,*
No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar.

Analisaremos, a seguir, esses versos numa linguagem acessível ao leitor contemporâneo. Antes de tudo, é conveniente lembrar que Tartaglia (assim como depois, faria também Cardano) não utiliza coeficientes negativos em suas equações. Então, em vez de uma equação geral do terceiro grau, ele deve considerar três casos possíveis:

$$x^3 + ax = b,$$
$$x^3 = ax + b,$$
$$x^3 + b = ax .$$

Tartaglia chama cada um desses casos de *operações* e afirma que irá considerar, de início, equações do primeiro tipo: "*cubo e coisa igual* a *número*". No quarto verso começa a considerar o segundo tipo *"quando o cubo estiver sozinho"* e, no sétimo, faz referência ao terceiro caso.

Vejamos agora como se propõe a resolver o primeiro caso, nos três versos iniciais, para depois justificar seu método, de uma forma simples.

O *número* se refere ao termo independente, que denotamos aqui por *b*. Quando diz *"acha dois outros diferentes nisso",* está sugerindo tomar duas novas variáveis, cuja diferença seja precisamente b, i.e., escolher U e V tais que:

$$U - V = b.$$

A frase "... *que seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa*" significa que U e V devem verificar:

$$UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Finalmente, "o *resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal*" significa que a solução é dada por

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Os outros dois casos carecem de interesse para o leitor moderno, uma vez que podemos reduzi-los ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação.

A frase final "... a *cidade cingida pelo mar*" é uma referência a Veneza, onde realizou suas descobertas.

A resolução da equação do terceiro grau

Nesta seção veremos como justificar a fórmula de Tartaglia para resolver equações do terceiro grau. Naturalmente, utilizaremos métodos e notações modernos, o que nos permitirá fazer uma exposição relativamente simples.

Vamos considerar uma equação do terceiro grau, escrita na forma

$$x^3 + ax = b,$$

para compará-la com a *primeira destas operações ... cubo e coisa igual a número,* discutida nos três primeiros versos de Tartaglia. Na verdade, há um caminho muito simples para achá-la. Comecemos por lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3 .$$

Pondo em evidência o produto uv, temos:

$$(u - v)^3 = 3uv(v - u) + (u^3 - v^3),$$

isto é, $(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3$.

Se podemos escolher, de alguma forma, u e v de modo que verifiquem:

$$uv = a/3,$$

$$u^3 - v^3 = b,$$

a relação acima se transformará em:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b,$$

o que significa que $x = u - v$ será uma solução da equação dada.

Em outras palavras, se conseguirmos achar u e v, que sejam soluções do sistema acima, tomando $x = u - v$, obter-se-á uma solução da equação proposta. Resta-nos então o problema de resolver o sistema em u e v. Para isso, observemos que, elevando ao cubo a primeira equação, ele se transforma em:

$$u^3 v^3 = (a/3)^3,$$

$$u^3 - v^3 = b.$$

Finalmente, fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$, temos:

$$UV = (a/3)^3,$$

$$U - V = b.$$

Isso é muito fácil de resolver; U e $-V$ são as raízes da equaçãodo segundo grau:

$$x^2 - bx + (-a/3)^3 = 0,$$

que são dadas por:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4\left(\frac{-a}{3}\right)^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Podemos tomar uma dessas raízes como sendo U e a outra como V, logo, temos $u = \sqrt[3]{U}$ e $v = \sqrt[3]{V}$. Portanto, obtemos precisamente a solução enunciada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Mais explicitamente, substituindo U e V pelos seus respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, nos textos, é chamada de *fórmula de Cardano* ou *de Tartaglia*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}.$$

Uma observação final: a equação geral do terceiro grau, que podemos escrever na forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0 ,$$

pode-se reduzir ao caso acima, mediante a mudança de variável $x = y - (a_1/3)$. Aliás, essa redução era conhecida por Tartaglia, mas não por Fior, e foi justamente esse fato que determinou a vitória do primeiro. Isso significa que, na verdade, Tartaglia conhecia um método geral para resolver *qualquer* equação do terceiro grau.

O produto de matrizes

Adaptado do artigo de
Cláudio Possani

*H*á pouco tempo um aluno perguntou-me o porquê da multiplicação de matrizes ser efetuada do modo como é usual. Este artigo é uma tentativa de responder a essa pergunta.

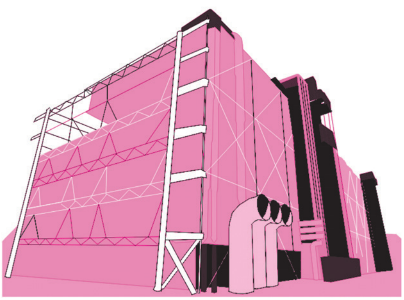
Vamos ver quando e como o produto matricial foi "criado" ("descoberto" ?; "inventado"?). Se alguém, em algum momento da História, começou a multiplicar matrizes, fazendo o produto das linhas pelas colunas, essa pessoa deve ter tido um bom motivo para fazê-lo.

Vamos, inicialmente, apresentar um exemplo baseado numa situação concreta.

Exemplo 1

Imaginemos a seguinte situação:

Uma empresa compra "matérias-primas", M_1 e M_2, óleo e essência, e as utiliza para fabricar dois produtos, sabonetes P_1 e P_2. Vamos indicar numa matriz Q a quantidade de matéria-prima utilizada na produção de cada produto.



$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Nessa matriz a_{ij} é a quantidade de matéria-prima M_j utilizada na produção do produto P_i (por exemplo, utiliza-se uma quantidade a_{12} de essência M_2 para produzir o sabonete P_1).

Vamos representar numa matriz de "custos", C, o preço de cada matéria-prima em duas condições diferentes de compra, C_1 e C_2: preço à vista e preço a prazo.

$$C = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Nessa matriz, o elemento b_{ij} é o preço da matéria-prima M_i comprada nas condições C_j (por exemplo, o preço da essência M_2, comprada a vista é b_{21}).

Isso significa que:

o custo de produzir P_1, comprando M_1 e M_2 à vista, é igual a

$$a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21};$$

o custo de produzir P_2, comprando M_1 e M_2 a prazo é igual a

$$a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22},$$

ou seja, se observarmos o produto das matrizes Q e C

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

e se denotarmos

$$Q \times C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

vemos que c_{ij} indica o custo de produzir o produto P_i comprando as matérias-primas na condição C_j.

Vejamos, agora, um exemplo teórico do uso do produtos de matrizes, na notação matricial para sistemas.

Exemplo 2

Um sistema $m\times n$ de equações lineares

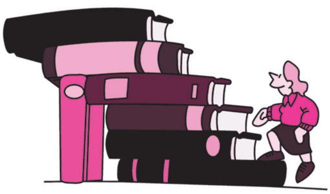
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

pode ser denotado, de forma bem mais reduzida, por $A\times X = B$, sendo A, X e B as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Se $m=n$ o sistema será *determinado* se, e somente se, A for inversível e sua solução pode ser obtida como $X = A^{-1}\times B$.

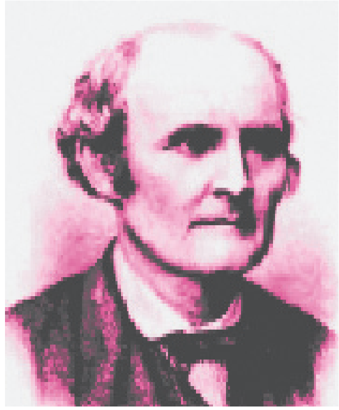
Um pouco de História



Tradicionalmente ensinamos Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares nessa ordem, o que é razoável do ponto de vista lógico, mas é bom observar que historicamente as coisas não se passaram assim. Creio não ser exagero dizer que o estudo de sistemas de equações, lineares ou não, se perde na História e é impossível estabelecer um "início" para a teoria. Determinantes foram aparecendo aqui e acolá, inicialmente associados à resolução de sistemas (já na China antiga!).

Cramer publicou um trabalho em 1750, no qual aparece a regra que hoje tem seu nome, embora já fosse conhecida antes.

O nome "determinante" foi utilizado pela primeira vez por Cauchy em 1812, e por essa ocasião determinantes também apareciam na Geometria.



Arthur Cayley

As matrizes já aparecem mais tarde! Até então não se falava em determinante de uma matriz, mas em determinante do sistema de equações. O conceito de matriz aparece em 1858, num trabalho de Cayley sobre transformações do plano, e a operação matricial envolvida é justamente o produto. Cayley considerava transformações (lineares) do plano R^2 em si próprio do tipo

$$T(x\,;\,y) = (ax + by\,;\,cx + dy).$$

Se não quisermos pensar em transformações, podemos considerar mudanças de variáveis:

$$T : \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases}.$$

Suponhamos duas mudanças de variáveis:

$$T_1 : \begin{cases} u = ax + by \\ v = cx + dy \end{cases} \quad \text{e} \quad T_2 : \begin{cases} r = Au + Bv \\ s = Cu + Dv \end{cases}.$$

Como podemos expressar r e s em termos de x e y?

Substituindo as expressões de T_1 em T_2 obtemos:

$$\begin{cases} r = A(ax + by) + B(cx + dy) = (Aa + Bc)x + (Ab + Bd)y \\ s = C(ax + by) + D(cx + dy) = (Ca + Dc)x + (Cb + Dd)y \end{cases}.$$

Cayley chamou de "matriz de T_1" a tabela $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e observou que para obtermos a matriz que fornece r e s em termos de x e y, bastava colocar as matrizes de T_2 e T_1 lado a lado e "multiplicá-las" da maneira como fazemos até hoje:

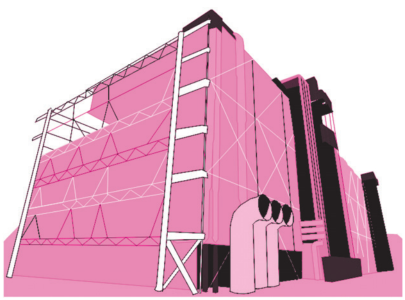
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Aa + Bc & Ab + Bd \\ Ca + Dc & Cb + Dd \end{pmatrix}.$$

Em linguagem de transformações, a matriz da direita é a matriz da transformação composta $T_2 \mathrm{o} T_1$. Lembrando que a composição de duas funções não é comutativa, isto é, em geral $f \mathrm{o} g \neq g \mathrm{o} f$, vemos como é natural que o produto matricial não comute.

As operações de adição matricial e multiplicação por escalar vieram depois do produto! A segunda metade do século XIX foi um período muito rico para o desenvolvimento da Álgebra, e a idéia de se estudarem estruturas algébricas abstratas ganhava força nessa época. O próprio Cayley (além de B. Peierce e C. S. Peierce), considerando essas operações e o produto matricial, criou o que hoje chamamos de "Álgebra das Matrizes", que fornece um dos primeiros exemplos de estrutura algébrica com uma operação não comutativa.

Para finalizar, duas observações: em primeiro lugar, gostaria de destacar a importância de se entender o contexto em que as idéias e as teorias matemáticas são desenvolvidas. O produto matricial, que à primeira vista é um tanto artificial, fica natural quando percebemos qual é o seu significado geométrico e qual foi a motivação de quem o criou. Acredito que, sempre que estudamos ou ensinamos um determinado tópico, deveríamos ter essa preocupação em mente.

Em segundo lugar, a *Teoria das Matrizes* é um ótimo exemplo de como uma teoria científica vai adquirindo importância e tendo aplicações que transcendem o objetivo inicial com que foi criada. É muito difícil julgar o valor de uma idéia no momento em que ela nasce. O tempo é o grande juiz, que decide quais descobertas científicas são, de fato, relevantes.



Sobre o ensino de sistemas lineares

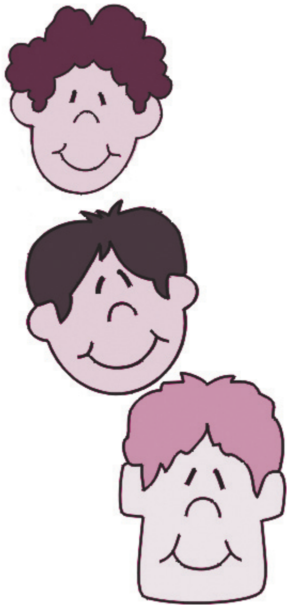
Adaptado do artigo de
Elon Lages Lima

*O*s sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares.

Esta nota visa dar aos professores que ensinam sistemas lineares algumas sugestões para ilustrar suas aulas e ajudá-los a situar adequadamente a matéria dentro do contexto dos seus conhecimentos.

Um problema

O curso de Matemática no semestre passado teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Jorge, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 4 na terceira, obteve no final um total de 47 pontos. Fernando acertou 3, 6 e 6, totalizando 54 pontos. Por sua vez, Marcos acertou 2, 7 e 5



questões, atingindo a soma de 50 pontos no final. Já Renato fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Renato?

Chamando de x, y e z, respectivamente, os pesos da primeira, segunda e terceira provas, as pontuações de Jorge, Fernando e Marcos nos fornecem as equações:

$$\begin{aligned} 6x + 5y + 4z &= 47 \\ 3x + 6y + 6z &= 54 \\ 2x + 7y + 5z &= 50. \end{aligned}$$

Com isso, determinamos x, y e z e, a partir daí, a nota final de Renato.

Não é difícil imaginar muitas outras situações que conduzem a sistemas de equações lineares como o acima. Os próprios alunos podem ser solicitados a fornecer tais exemplos, sendo então levados a concluir que os sistemas lineares não foram inventados apenas por capricho dos professores.

Observações gerais

No que se segue, faremos referências ao sistema (S) abaixo:

$$(S) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Uma *solução* de (S) é um terno ordenado (x, y, z) de números reais que, substituídos no primeiro membro de cada uma das equações acima, torna-o igual ao segundo membro. Por exemplo, (2, 3, 5) é uma solução do sistema do exemplo anterior e escreve-se

$$x = 2, \quad y = 3, \quad z = 5.$$

O sistema (S) pode ter uma única solução, uma infinidade de soluções, ou nenhuma solução. No primeiro caso, diz-se que o sistema é *determinado,* no segundo, *indeterminado* e, no terceiro, *impossível.*

Os sistemas lineares obedecem ao princípio geral (e um tanto vago) de que para determinar 3 números são necessárias 3 informações distintas sobre esses números.

O sistema é indeterminado quando uma (ou duas) dessas informações é (ou são) conseqüência(s) das demais. Por exemplo, se nos propusermos a determinar x, y e z sabendo que

$$\begin{aligned} &2x - 4y + 6z = 8, \\ &x - 2y + 3z = 4 \ \text{ e} \\ &3x - 6y + 9z = 12, \end{aligned}$$

teremos aí um sistema indeterminado, pois na realidade nos é dada apenas uma informação sobre esses números, a saber, que $x - 2y + 3z = 4$. As outras duas afirmações resultam desta.

A indeterminação significa que o problema expresso pelo sistema (S) possui infinitas soluções, cabendo-nos em cada caso escolher a que melhor se adapta às nossas conveniências.

Já o sistema impossível ocorre quando as informações que nos são fornecidas para calcular x, y e z são incompatíveis. Por exemplo, se uma das equações do sistema é

$$x - 2y + 3z = 4,$$

outra equação não pode ter a forma

$$2x - 4y + 6z = 7.$$

pois, multiplicando a primeira por 2 e subtraindo a segunda, chegaríamos ao absurdo 0 = 1.

O sistema (S) pode ser encarado sob diversos pontos de vista. Essa variedade de interpretações enriquece a gama de aplicações que tem seu estudo e, por outro lado, permite a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-lo. A interpretação geométrica que apresentamos a seguir têm nível elementar e estão ao alcance do aluno do ensino médio.

Interpretação geométrica

Cada solução (x, y, z) do sistema (S) pode ser olhada como um ponto P do espaço tridimensional, dado por suas coordenadas cartesianas:

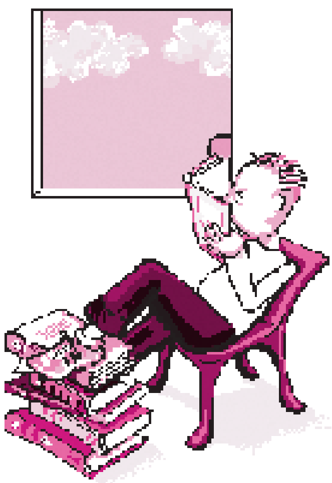
$P = (x, y, z)$. Sob este ponto de vista, cada uma das equações do sistema é a equação de um plano nesse espaço, e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses planos. Mais precisamente, se π_1, π_2 e π_3 são os planos definidos pelas três equações de (S), então as soluções de (S) são os pontos $P = (x, y, z)$ que pertencem à interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ desses planos.

Assim, por exemplo, se pelo menos dois desses planos são paralelos, ou se dois deles intersectam o terceiro segundo retas paralelas, a interseção $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3$ é vazia e o sistema é impossível.

Noutro exemplo, podemos ter uma reta r formando uma espécie de eixo, contido simultaneamente nos três planos.

Então $\pi_1 \cap \pi_2 \cap \pi_3 = r$ e o sistema é indeterminado: suas soluções são os infinitos pontos de r. O sistema é determinado quando os três planos se encontram num só ponto, como duas paredes adjacentes e o teto.

Há ao todo 8 posições relativas possíveis para os planos π_1, π_2 e π_3. Quatro dessas posições correspondem aos sistemas impossíveis; nas outras quatro, o sistema tem solução. É importante observar que se pode concluir em qual das 8 posições se encontram os planos de (S) examinando os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i que nele aparecem. O leitor interessado poderá verificar essa afirmação em textos de Álgebra Linear.



Uma experiência sobre o ensino de sistemas lineares

Adaptado do artigo de
Maria Cristina Costa Ferreira
Maria Laura Magalhães Gomes

O estudo dos sistemas lineares está sempre presente nos programas de Matemática do ensino médio. Entretanto, seu significado geométrico, tratado no artigo *Sobre o ensino de sistemas lineares*, pelo Prof. Elon Lages Lima, é comumente deixado de lado.

Por meio de nossas observações e dos depoimentos de alguns participantes de um curso de aperfeiçoamento de professores, pretendemos mostrar como a interpretação geométrica pode contribuir para uma melhor compreensão do estudo dos sistemas lineares.

Procuramos, a seguir, mostrar algumas percepções dos professores durante a experiência do curso, com base nas observações feitas em sala de aula e nos trabalhos por eles apresentados.

A análise feita pelos professores

Dois aspectos destacaram-se: a interpretação geométrica dos sistemas lineares 3×3 e a opção a ser feita entre os métodos de resolução desses sistemas – regra de Cramer ou escalonamento? A seguir comentamos cada um desses aspectos separadamente.

(1) Interpretação geométrica dos sistemas lineares 3×3

Segundo os professores, não é de fato usual interpretar geometricamente os sistemas lineares 3×3, embora essa interpretação seja, em geral, realizada para sistemas lineares de duas equações e duas incógnitas, quando se faz seu estudo na 7ª série do ensino fundamental. Nesse caso, cada equação do sistema

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{aligned}$$

representa uma reta, e as posições relativas de duas retas no plano são:

(a) retas concorrentes;
(b) retas paralelas;
(c) retas coincidentes.

Nos casos (a), (b) e (c), o sistema possui solução única, não possui solução ou possui infinitas soluções, respectivamente.

Já para sistemas lineares 3×3 da forma

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \qquad (1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \qquad (2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \qquad (3) \end{aligned}$$

as equações (1), (2), (3) representam planos π_1, π_2 e π_3 no espaço tridimensional.

Entretanto, as possibilidades para as posições dos três planos são oito. Quatro delas correspondem a sistemas impossíveis (nenhuma solução), três, a sistemas indeterminados[(*)] (infinitas soluções), e uma, a sistemas que têm uma única solução.

Os depoimentos abaixo mostram que essa abordagem geométrica torna o assunto mais interessante e dá maior segurança para quem o ensina.

[(*)] ***Nota***
Embora esse seja o nome usual, na verdade o conjunto-solução desses sistemas está completamente determinado, apesar de ter infinitos elementos.

Professor A

"Trabalho com uma turma, do 2º ano do ensino médio, muito interessada em estudar. Quando ia introduzir Sistemas Lineares, fiz uma revisão de sistemas do 1º grau com duas variáveis vistos na 7ª série do ensino fundamental. Os alunos fizeram várias perguntas sobre os tipos de solução. Fiz os gráficos das equações e mostrei as retas paralelas, coincidentes e concorrentes para justificar as soluções. Se não tivesse feito esse curso, teria ficado em 'apuros' com 3 variáveis e 3 equações. Eles também me perguntaram como representá-los graficamente."

Professor B

"Estou sabendo fazer a interpretação geométrica dos problemas, e isso me deixa mais à vontade. Antigamente, sabia fazer algebricamente, mas ficava uma lacuna, um vazio, faltava a interpretação."

Os comentários feitos podem ser sistematizados assim: ao associar um plano a cada equação do sistema linear 3×3, a abordagem geométrica permite distingüir tipos diferentes de sistemas indeterminados e impossíveis. Analisando as possibilidades para as posições relativas de três planos no espaço, os professores perceberam que:

1. No caso dos sistemas indeterminados, as infinitas soluções podem ser os pontos de um plano ou de uma reta.

2. No caso dos sistemas impossíveis, a inexistência de soluções pode ocorrer de maneiras distintas: dois ou três planos podem ser paralelos entre si ou os três planos podem se interceptar dois a dois, segundo retas paralelas.

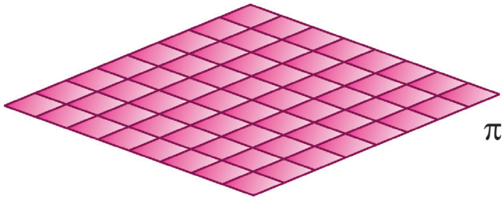
Ilustremos essas situações com alguns exemplos.

Exemplo 1

O sistema

$$\begin{aligned} x - y + z &= 1 \qquad (1)\\ 2x - 2y + 2z &= 2 \qquad (2)\\ 3x - 3y + 3z &= 3 \qquad (3) \end{aligned}$$

possui infinitas soluções, pois todos os ternos ordenados de números reais da forma $(a, b, 1 - a + b)$ satisfazem as suas três equações. Vemos imediatamente que cada equação pode ser obtida a partir de qualquer outra, por meio da multiplicação por uma constante. Portanto, geometricamente, (1), (2) e (3) representam o mesmo plano π, e as infinitas soluções nesse caso são os pontos de π.



$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi$$

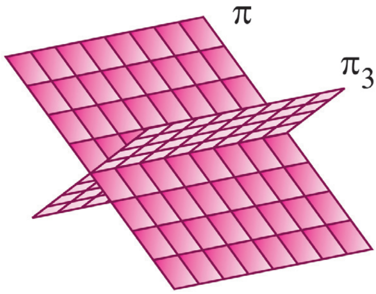
Exemplo 2

O sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \quad (1) \\ 2x + 2y + 2z &= 2 \quad (2) \\ z &= 0 \quad (3) \end{aligned}$$

também possui infinitas soluções, já que os ternos ordenados do tipo $(a, 1 - a, 0)$, em que a é real, satisfazem as três equações. Contudo, a interpretação geométrica é diferente da do exemplo 1.

De fato, (1) e (2) representam o mesmo plano π anterior, mas (3) representa um outro plano, π_3, que intersecta π, segundo a reta r. (No espaço, dois planos não coincidentes e não paralelos têm como interseção uma reta.) Ao fazer a variar no conjunto dos números reais, obtemos todos os pontos dessa reta.



$$\pi_1 = \pi_2 = \pi \qquad \pi \cap \pi_3 = r$$

Os exemplos acima mostram duas possibilidades de "indeterminação". Vejamos agora dois exemplos distintos de sistemas impossíveis.

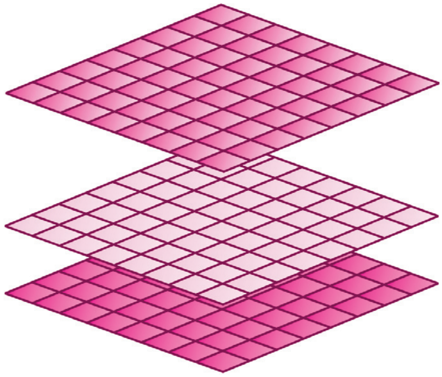
Exemplo 3

O sistema

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \quad (1)\\ x + y + z &= 1 \quad (2)\\ x + y + z &= 2 \quad (3)\end{aligned}$$

claramente não possui solução.

A situação geométrica corresponde ao caso em que os três planos π_1, π_2 e π_3 são paralelos, já que não existe um terno ordenado real (x, y, z) que satisfaça simultaneamente quaisquer duas dessas equações.



$\pi_1 // \pi_2 // \pi_3$

Exemplo 4

O sistema

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 2z &= 2 \quad (1)\\ 3x - 2y + 4z &= 2 \quad (2)\\ 4x - y + 6z &= 3 \quad (3)\end{aligned}$$

também não possui solução.

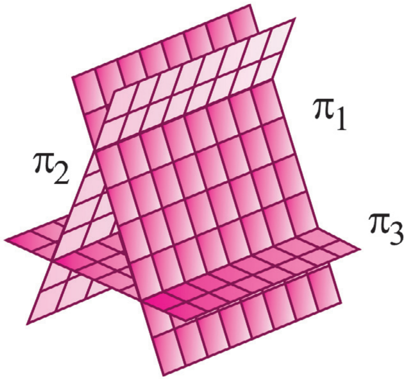
Uma maneira simples de verificarmos esse fato é, por exemplo, somar as equações (1) e (3) e comparar o resultado com a equação (2).

Considerando agora os sistemas formados por (1) e (2), (1) e (3) e por (2) e (3), podemos concluir que $\pi_1 \cap \pi_2$ é uma reta r, $\pi_1 \cap \pi_3$ é uma reta s e $\pi_2 \cap \pi_3$ é uma reta t.

Verifiquemos que r, s e t são paralelas.

Os pontos de r satisfazem (1) e (2), logo não satisfazem (3), pois o sistema é impossível. Portanto, temos r paralela a π_3. Como s está contida em π_3, temos que *r* e *s* não se cortam; logo são paralelas, já que ambas estão contidas em π_1. De modo análogo, vemos que *s* é paralela a *t*.

Portanto, a interpretação geométrica do sistema é que os planos representados por suas equações se intersectam dois a dois segundo três retas paralelas.



$\pi_1 \cap \pi_2 = r$ $\quad$ $\pi_1 \cap \pi_3 = s$ $\quad$ $\pi_2 \cap \pi_3 = t$ $\quad$ $r \,//\, s \,//\, t$

Figura 4

2) Regra de Cramer × escalonamento

Os professores também demonstraram interesse na questão da opção pelo método de resolução de sistemas lineares 3×3.

A regra de Cramer (Gabriel Cramer, 1704-1752) para resolver sistemas lineares só pode ser aplicada no caso em que o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas do sistema é não nulo. Essa situação corresponde ao caso em que os três planos se intersectam num ponto e o sistema tem solução única. Entretanto vários livros afirmam, erroneamente, que um sistema que possui nulos todos os determinantes da regra de Cramer é indeterminado.

Com relação à discussão sobre a utilização incorreta da regra de Cramer, os professores também se manifestaram. Vários deles citaram livros em que aparece a afirmativa acima e admitiram que já haviam cometido tal erro ao ensinar. A interpretação geométrica dos sistemas lineares possibilitou-lhes perceber claramente a falsidade dessa afirmativa por meio de exemplos que eles mesmos souberam construir. Vejamos um desses exemplos.

Exemplo 5

O sistema

$$\begin{aligned} x+y+z&=0 \qquad (1)\\ x+y+z&=1 \qquad (2)\\ x+y+z&=2 \qquad (3)\end{aligned}$$

considerado no exemplo 3, claramente não possui solução (os três planos são paralelos). Entretanto, os determinantes utilizados na regra de Cramer são todos nulos, pois as matrizes possuem pelo menos duas colunas iguais.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}\quad \Delta x=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&1\\2&1&1\end{vmatrix}\quad \Delta y=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}\quad \Delta z=\begin{vmatrix}1&1&0\\1&1&1\\1&1&2\end{vmatrix}.$$

A partir do curso, os professores passaram a dar mais ênfase ao método de escalonamento, mais geral, tendo adotado essa prática em suas salas de aula, como mostram os seguintes relatos.

Professor C

"Este curso me ajudou muito, principalmente na resolução de sistemas lineares 3 x 3, com os quais antes trabalhava, usando determinantes e quando encontrava todos os determinantes iguais a zero, classificava o sistema como indeterminado, cometendo o mesmo erro de alguns autores. Após o curso passei a resolver sistemas com meus alunos, usando o escalonamento. Tenho mais clareza e segurança ao abordar o assunto."

Professor D

"Apesar de não ter mencionado a resolução de sistemas por Cramer quando $\Delta = 0$, alguns alunos repetentes apresentaram soluções com a teoria errada. A referência ao assunto que vi no curso ajudou-me a perceber e a comentar o erro. Acredito que no próximo ano eu apresentarei esse assunto de forma melhor."

Conclusão

A associação dos sistemas lineares 3×3 com a Geometria Espacial foi, como vimos, uma surpresa para os professores, que logo pensaram um modo de adaptar tal interpretação à realidade da sala de aula.

Alguns ponderaram que, apesar do estudo de retas e planos no espaço ser feito após o de sistemas lineares, é possível apresentar aos alunos a associação geométrica, de maneira simples. Consideraram importante a analogia com o estudo de sistemas lineares 2×2, que é feito no ensino fundamental. Esse exemplo é, a nosso ver, uma boa ilustração de como se pode enriquecer o trabalho com a Matemática, evitando-se uma visão compartimentada, presente muitas vezes entre os professores.

Gabriel Cramer

Capítulo 2

Funções

Uso de polinômios para surpreender

Adaptado do artigo de
Catherine Herr Mulligan

Introdução

Ao ensinar álgebra, tento apresentar a matéria como relevante e útil, mas não creio que seja necessário manter sempre as considerações de "relevância" ligadas ao mundo real. A maioria dos meus alunos continuará estudando Matemática e tento ensinar-lhes que a álgebra é um instrumento que se usa em Matemática superior – uma linguagem comum e um meio de comunicação. As aplicações ao mundo real são importantes, mas também é bom que os alunos vejam como se usa a álgebra para o bem da Matemática.

A aritmética dos polinômios é uma boa área para implementar essa filosofia. A manipulação de expressões polinomiais é uma técnica essencial; no entanto, como qualquer habilidade que exige prática, pode tornar-se repetitiva e monótona.

Uma coleção de alguns "fatos surpreendentes" permite ao aluno "descobrir" e então demonstrar esses fatos, usando a aritmética dos polinômios.

Alguns dos fatos envolvem “truques” para cálculo mental rápido, que podem ser explicados, usando uma representação polinomial simples.

Nesta época de calculadoras, esses fenômenos são introduzidos, não porque são rápidos, mas porque funcionam; os alunos são desafiados a provar ***por que*** funcionam!

Fato Surpreendente 1

Se dois números de dois algarismos têm iguais os algarismos das dezenas, e se os algarismos das unidades somam 10, pode-se calcular seu produto instantaneamente.

Se os alunos me testam, com 77×73, por exemplo, respondo instantaneamente 5621. Após mais um ou dois exemplos, revelo meu “truque”: multiplica-se o algarismo das dezenas, 7, pelo seu sucessor, 8, achando 56, cujos algarismos serão, nessa ordem, os algarismos dos milhares e das centenas da resposta. Acrescenta-se à direita de 56 o produto dos algarismos das unidades, 7×3 ou 21, obtendo-se 5621.

Podemos aumentar a confiança no processo, aplicando-o a vários outros casos, mas muitos exemplos não constituem uma demonstração. Porém, se usarmos binômios para representar os números a serem multiplicados, podemos dar uma demonstração que independe dos exemplos escolhidos.

Represente por a o algarismo das dezenas dos dois números considerados e por b o algarismo das unidades do primeiro número. Então o algarismo das unidades do segundo número será $10 - b$.

Logo, $10a + b$ *é o* primeiro número e $10a + (10 - b)$, o segundo número. Seu produto é:

$$(10a + b) \times (10a + 10 - b) = \dots = 100a\,(a + 1) + b\,(10 - b).$$

Fato Surpreedente 2

Se você somar 1 ao produto de quatro inteiros consecutivos, o resultado sempre será um quadrado perfeito.

Alguns exemplos levarão os alunos a suspeitar que essa afirmação é sempre verdadeira. Poderemos anotar nossas observações no quadro-negro assim:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 25 = 5^2, \quad 2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 121 = 11^2,$$

$$97 \times 98 \times 99 \times 100 + 1 = 94109401 = 9701^2.$$

Para obter uma prova desse fato, vamos representar os inteiros consecutivos por: n, $n+1$, $n+2$ e $n+3$.

Então

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 \qquad (1)$$

Temos, agora, dois procedimentos possíveis.

Alguns alunos notarão que o quadrado perfeito, nos nossos exemplos numéricos, é o quadrado de 1 mais o produto do primeiro pelo último termo da seqüência (é também o quadrado de 1 menos o produto do segundo pelo terceiro termo da seqüência). Poderemos observar, por exemplo, que

$$4 \times 5 \times 6 \times 7 + 1 = 841 = 29^2 = (1 + 4 \times 7)^2.$$

Expressando em polinômios, escrevemos

$$[1 + n(n+3)]^2 = n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1. \qquad (2)$$

Isso, além de confirmar que (1) é um quadrado perfeito, também nos diz de que número é o quadrado perfeito.

Outra maneira de proceder é trabalhar diretamente a partir de (1) e conjecturar que seria bom fatorar o segundo membro e ver que ele é um quadrado perfeito. Esse quadrado teria, para um a conveniente, a forma:

$$(n^2 + an + 1)^2 = n^4 + 2an^3 + (2 + a^2)\, n^2 + 2an + 1. \qquad (3)$$

Igualando os coeficientes em (1) e (3), temos:

$$2a = 6 \;\text{ e }\; 2 + a^2 = 11, \;\text{ ou seja, }\; a = 3.$$

Então, $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$.

Fato Surpreendente 3

O quociente da divisão por 8 de um produto de quatro inteiros positivos consecutivos é um número triangular.

Definimos número triangular como sendo um número da forma $\dfrac{n(n+1)}{2}$ para n um natural positivo.

Logo, esses números são:

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ 21,\ 28 \ldots$ fazendo $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots$

A razão do nome triangular é explicada pela figura:

```
                                            *
                                 *        * *
                      *        * *      * * *
             *      * *      * * *    * * * *
   *       * *    * * *    * * * *  * * * * *
 n = 1    n = 2   n = 3     n = 4      n = 5
```

Testamos o resultado no exemplo:

$(3 \times 4 \times 5 \times 6) \div 8 = 45$ que é o número triangular para $n = 9$.

Para a prova do resultado, escrevemos o produto de quatro inteiros consecutivos, dividido por 8, como:

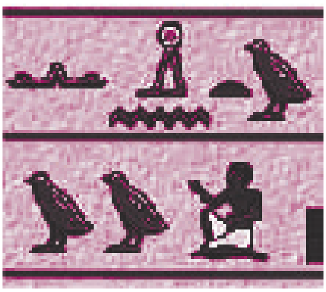
$$\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{8} = \frac{m(m+3)}{2} \times \frac{(m+1)(m+2)}{2} \times \frac{1}{2} =$$

$$\frac{m^2+3m}{2} \times \frac{m^2+3m+2}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{m^2+3m}{2} \times \left[\frac{m^2+3m}{2} + 1\right] \times \frac{1}{2}.$$

Logo, temos um número triangular para $n = \dfrac{m^2+3m}{2}$, pois esse número é um inteiro positivo; verificar isso é um exercício interessante que deve ser proposto aos alunos.

Codificando e decifrando mensagens

Adaptado do artigo de
Antonio Carlos Tamarozzi



Introdução

***O**peraçõ*es de serviços disponíveis na Internet, movimentações bancárias e outras transações eletrônicas necessitam da criptografia para comunicação confidencial de dados.

A palavra criptografia tem origem grega (*kripto* = escondido, oculto; *grapho* = grafia) e define a arte ou ciência de escrever mensagens em códigos, de forma que somente pessoas autorizadas possam decifrá-las. A criptografia é tão antiga quanto a própria escrita; já estava presente no sistema de escrita hieroglífica dos egípcios e os romanos utilizavam códigos secretos para comunicar planos de batalha. Contudo, desde aquele tempo, seu princípio básico continua o mesmo: encontrar uma transformação (função) injetiva f entre um conjunto de mensagens escritas em um determinado alfabeto (de letras, números ou outros símbolos) para um conjunto de mensagens codificadas. O fato de f ser inversível é a garantia de o processo ser reversível e as mensagens poderem ser reveladas pelos receptores.

O grande desafio de um processo criptográfico, portanto, está em ocultar eficientemente os mecanismos (chaves) para a inversão de f, de modo que estranhos não possam fazê-lo.

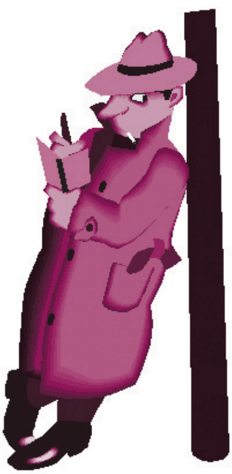
	Emissor		***Receptor***	
Mensagem original	$\xrightarrow{f}$	Mensagem codificada	$\xrightarrow{f^{-1}}$	Mensagem original

Descreveremos aqui dois exemplos elementares de processos criptográficos, sendo o primeiro acessível inclusive para alunos do ensino fundamental. Acreditamos que possam constituir material útil para exercícios, como também para atividades e jogos de codificação. O professor pode dispor deles para fixação de conteúdos matemáticos associados, como por exemplos: funções e matrizes.

Inicialmente, relacionamos números ao alfabeto (o símbolo # representa um espaço em branco) que vamos utilizar nos modelos. Assim:

#	A	B	...	J	K	L	...	V	W	X	Y	Z
0	1	2	...	10	11	12	...	22	23	24	25	26

Portanto, cifrar uma mensagem recai no problema de permutar números por meio de uma regra f. Pode-se fazer isso, de forma muito prática, por exemplo, através das funções afins $f(x) = ax + b$, com a, b inteiros, $a \neq 0$, definidas no conjunto $\{0, 1, ..., 26\}$.



Suponhamos que Ana e Ivo desejem trocar mensagens sigilosas utilizando o alfabeto escolhido. O primeiro passo a tomarem é definirem a função cifradora, digamos $f(x) = 2x - 3$.

Assim, por exemplo, à mensagem

R E V I S T A   R P M

Ana associa a seqüência numérica

18 5 22 9 19 20 1 0 18 16 13

mas transmite a Ivo a seqüência numérica obtida pelas imagens de f, isto é,

$$33 \quad 7 \quad 41 \quad 15 \quad 35 \quad 37 \quad -1 \quad -3 \quad 33 \quad 29 \quad 23.$$

Ao recebê-la, Ivo, calculando a imagem da função inversa de $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2}$ nessa seqüência e utilizando a correspondência alfabeto-numérica, obtém a mensagem original, pois:

$$f^{-1}(33) = \frac{33+3}{2} = 18 = R, \ \ldots, \ f^{-1}(23) = \frac{23+3}{2} = 13 = M..$$

Depois de os alunos dominarem o processo, seria oportuno que o professor propusesse situações em que um intruso tente decifrar mensagens apoderando-se das seqüências numéricas codificadas. Como estamos utilizando funções afins, para tanto é suficiente apenas duas associações corretas entre números das seqüências original e codificada. Admitindo conhecidas essas associações, é um exercício interessante para os alunos determinarem f.

O segundo método criptográfico que apresentaremos utiliza matrizes invertíveis como chaves, o que dificulta um pouco mais sua violação.

Suponhamos que Ana e Ivo combinem previamente utilizar a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e sua inversa $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ como chaves. Para transmitir a mesma mensagem acima, Ana inicialmente monta uma matriz mensagem M dispondo a seqüência numérica associada em colunas e completa a posição restante com 0, ou seja, obtém

$$M = \begin{pmatrix} 18 & 22 & 19 & 1 & 18 & 13 \\ 5 & 9 & 20 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em seguida, codifica-a calculando,

$$AM = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 22 & 19 & 1 & 18 & 13 \\ 5 & 9 & 1 & 0 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 64 & 84 & 97 & 3 & 86 & 39 \\ 23 & 31 & 39 & 1 & 34 & 13 \end{pmatrix},$$

e transmite a seqüência 64 23 84 31 97 39 3 1 86 34 39 13. Para ler a mensagem recebida, Ivo, da mesma forma, restaura a forma matricial AM, e em seguida, com sua chave A^{-1}, pode recuperar M através da identidade matricial,

$$M = A^{-1}(AM)$$

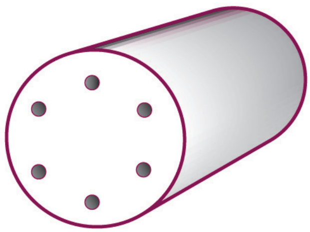
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 64 & 84 & 97 & 3 & 86 & 39 \\ 23 & 31 & 39 & 1 & 34 & 13 \end{pmatrix}.$$

Como já frisamos, os métodos tratados neste trabalho tem apenas caráter instrutivo. Na prática atual tais processos são pouco utilizados pela inconveniência de exigirem trocas prévias de chaves entre os usuários. Portanto, são inviáveis na descrição de transações eletrônicas nas quais um único receptor recebe dados de milhares de emissores, como ocorre em vendas pela Internet, transações bancárias e outras. Mesmo nesses casos mais complexos, a Matemática resolveu a trama, e desta vez, quem diria, o ramo da Teoria dos Números.

Trigonometria na oficina mecânica

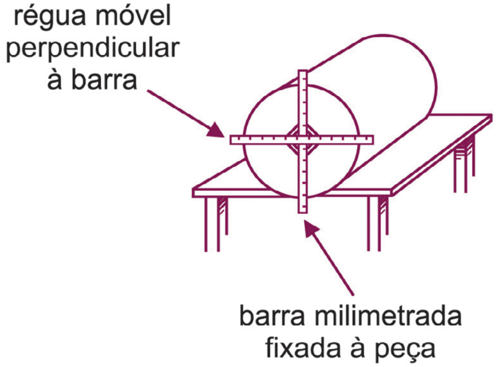
Adaptado do artigo de
Pedro Firmino da Silva

*E*ste problema foi-me apresentado por um torneiro mecânico, que desejava fazer 6 furos na base de uma peça de forma cilíndrica. A peça ficaria como indicado na figura ao lado.

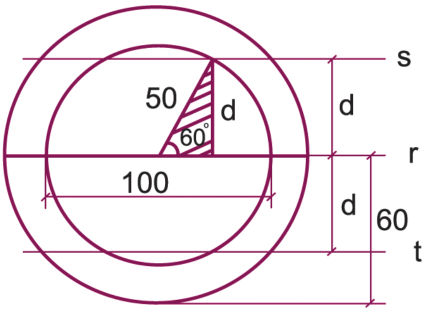


O diâmetro da base media 120 *mm* e os furos deveriam distribuir-se igualmente sobre uma circunferência imaginária de diâmetro 100 *mm*.

O problema pode ser resolvido graficamente com simplicidade, usando-se um compasso. Entretanto, o torneiro dispunha apenas de um outro instrumento que ele chamou de *altímetro*. Vou apresentá-lo esquematicamente. O altímetro é constituído por uma barra milimetrada fixada à peça uma régua que desliza perpendicularmene à barra.



Para resolver o problema, primeiro desenhamos, com a régua móvel, um diâmetro da base. Sobre ele marcamos os centros dos dois primeiros furos, que ficarão afastados de 100 *mm.*

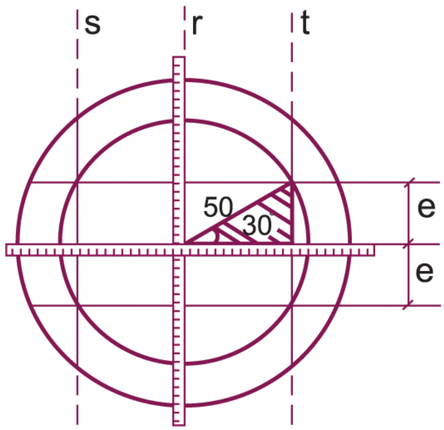


Imaginemos o problema resolvido. Seja r a reta que contém o diâmetro.

Com a divisão da circunferência em 6 partes iguais, obtemos ângulos centrais de 60°. As retas s e t são paralelas à reta r, e suas distâncias a ela são iguais a $d = 50 \times$ sen$60° \cong$ 43 mm.

Desse modo, com a régua móvel, desenhamos as retas s e t, sobre as quais estarão os outros quatro furos.

A régua móvel, sempre perpendicular à barra fixa, executa um movimento de translação. Como não é possível transladar a barra (que é fixa), giramos o altímetro de 90°, colocando a barra sobre o diâmetro desenhado.



Outra vez, imaginemos o problema resolvido. A distância e é dada por:

$$e = 50 \times sen30° = 25 \; mm.$$

Assim, deslocando a régua móvel, marcamos os centros dos outros quatro furos.

Logaritmos

Vamos aqui expor partes adaptadas de alguns textos publicados na *RPM* que apresentam aplicações interessantes e motivadoras dos logaritmos.

O jogo de xadrez

Adaptado do artigo de
Geraldo Ávila

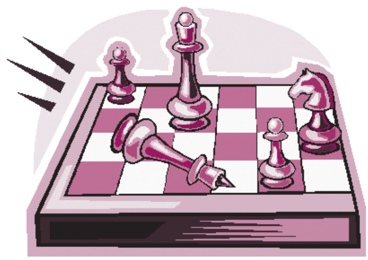
Segundo uma lenda antiga, o jogo de xadrez foi inventado na Índia para agradar a um soberano, como passatempo que o ajudasse a esquecer os aborrecimentos que tivera com uma desastrada batalha. Encantado com o invento, o soberano, rei Shirham, quis recompensar seu súdito Sissa Ben Dahir, o inventor do xadrez. Shirham disse a Sissa que lhe fizesse um pedido, que ele, rei Shirham, o atenderia prontamente. Sissa disse, simplesmente:

–Bondoso rei, dê-me então um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda casa, quatro $(=2^2)$ pela terceira, oito $(=2^3)$ pela quarta, e assim por diante, até 2^{63} grãos de trigo pela última casa do tabuleiro, isto é, a 64ª casa.

O rei achou esse pedido demasiado modesto e, sem dissimular seu desgosto, disse a Sissa:

– Meu amigo, tu me pedes tão pouco, apenas um punhado de grãos de trigo. Eu desejava cumular-te de muitas riquezas –palácios, servos e tesouros de ouro e prata.

Como Sissa insistisse em seu pedido original, o rei ordenou a seus auxiliares e criados que tratassem de satisfazê-lo. 0 administrador do palácio real mandou que um dos servos buscasse um balde de trigo e fizesse logo a contagem. Um balde com cerca de 5 kg de trigo contém aproximadamente 115 000 grãos (como o leitor pode verificar, fazendo, ele mesmo, a contagem...); foi o suficiente para chegar à 16ª casa do tabuleiro, mas não além, pois (veja o quadro logo abaixo)



$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{15} = 2^{16} - 1 = 65\,535,$$

enquanto, para chegar à 17ª casa seriam necessários

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{16} = 2^{17}\ 1 = 131\,071$$

grãos de trigo.

Lembremos a fórmula que fornece a soma dos termos de uma progressão geométrica. Dado qualquer número $q \neq 1$, chamado *razão* da *progressão,* e n um inteiro positivo arbitrário, temos

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$$

e observamos que

$$qS = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}.$$

Portanto, subtraindo a primeira dessas igualdades da segunda, obtemos

$$qS - S = q^{n+1} - 1, \text{ donde } \quad S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

que é a fórmula da soma que está sendo usada nos cálculos.

"Traga logo um saco inteiro" (60 kg, aproximadamente 1 380 000 grãos) –ordenou o administrador a um dos servos–, "depois você leva de volta o que sobrar".

Ao mesmo tempo providenciou a vinda de mais uma dezena de contadores de trigo para ajudar na tarefa, que se tornava mais e mais trabalhosa.

O administrador, os servos e os contadores já haviam terminado com 10 sacos de trigo (= 10 × 1 380 000 = 13 800 000 de grãos) e mal haviam passado da 23ª casa do tabuleiro, visto que

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{22} = 2^{23} - 1 = 8\ 388\ 607 \quad \text{e}$$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{23} = 2^{24} - 1 = 16\ 777\ 215.$$

A essa altura o rei foi notificado do que estava acontecendo e alertado de que as reservas do celeiro real estavam sob séria ameaça. Insistindo, porém, em atender ao pedido de seu súdito, ordenou que o trabalho continuasse. Mandou convocar mais servos e mais contadores; ao mesmo tempo, mandou chamar os melhores calculistas do reino para uma avaliação do problema. Esses vieram e, cientes do que se passava, debruçaram-se nos cálculos. Em menos de uma hora de trabalho, puderam esclarecer o rei de que não havia trigo suficiente em seu reino para atender ao pedido de Sissa. Mais do que isso, em todo o mundo conhecido na época não havia trigo suficiente para atender àquele pedido!

No tempo em que isso aconteceu, pensava-se que o mundo fora criado havia menos de 5 000 anos. Assim, os calculistas do rei puderam dizer-lhe que nem mesmo toda a produção mundial de trigo, desde a criação do mundo, seria suficiente para atender ao pedido de Sissa, que resultava:

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = (2^{64} - 1) \text{ grãos.}$$

Como calcular 2^{64} ?

Hoje em dia é muito fácil calcular um número como 2^{64}, valendo-se de um dos vários programas implementados em computador. Usando, por exemplo, o programa MATHEMATICA, os cálculos ficam extremamente simples, cada um levando apenas uma fração de segundo para ser executado e chegamos a $2^{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

Mas, e quando não havia computador? Bem, se fosse há uns 300 anos, eles poderiam recorrer aos logaritmos.

Para efetuar cálculos com a ajuda dos logaritmos, primeiro é preciso dispor de uma tábua (ou tabela) dos logaritmos dos números num certo intervalo. Por exemplo, uma tábua dos logaritmos decimais dos números inteiros de 1 a 10 000 já é suficiente para muitos cálculos. A título de ilustração, tentemos calcular o número 2^{64}.

Consultando uma tábua (de logaritmos decimais), encontramos $\log 2 \approx 0{,}30103$, de sorte que

$$\log 2^{64} = 64 \times \log 2 \approx 64 \times 0{,}30103 = 19{,}26592.$$

Este cálculo já é suficiente para sabermos que 2^{64} está compreendido entre 10^{19} e 10^{20}, pois seu logaritmo é maior do que 19 e menor do que 20, o que já é uma boa informação.

O logaritmo de um número pode sempre ser escrito como a soma de um inteiro – chamado *característica* – e uma parte decimal m tal que $0 \leq m < 1$, chamada *mantissa.* No caso do número a calcular, 19 é a característica e 0,26592 é a mantissa de seu logaritmo. As tábuas só dão as mantissas. Mas, ao consultarmos uma tábua, nem sempre encontramos, na coluna dos logaritmos, a mantissa desejada. No caso concreto que estamos considerando, ao consultar a tábua, verificamos que o logaritmo 0,26592 está compreendido entre dois outros que lá se encontram; mais precisamente,

$$\log 1{,}844 = 0{,}26576 \quad \text{e} \quad \log 1{,}845 = 0{,}26600.$$

A partir daqui, fazemos uma interpolação para determinar o número que tem $0{,}26592$ como logaritmo.

Encontramos

$$0{,}26592 \approx \log 1{,}844666...,$$

donde, $\log(1{,}844666... \times 10^{19}) \approx 19{,}26592$; e daqui segue que

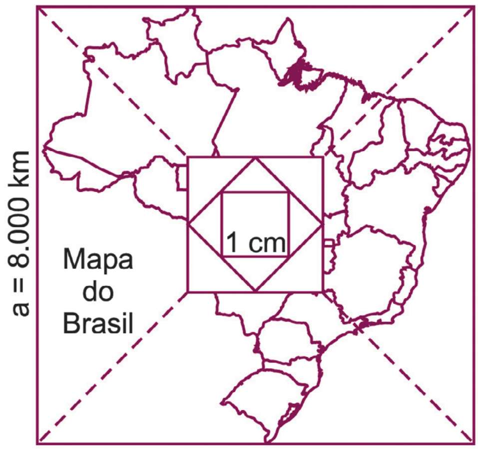
$$2^{64} \approx 1{,}844666... \times 10^{19} \approx 18446666666666666666.$$

Comparando este valor aproximado com o valor exato calculado anteriormente, verificamos que o erro relativo é inferior a 10^{-5}; portanto, o valor aproximado é muito bom.

Os quadrados que cobrem o Brasil

Adaptado do artigo de
Renato Fraenkel

"Quantos quadrados são necessários para "cobrir" o Brasil, supondo o processo indicado na figura com $a = 8.000$ km e o lado do primeiro quadrado igual a 1 cm?"



Aqui deixo que os alunos estimem o resultado e suas estimativas são muito acima do resultado correto (que é menor do que a intuição indica).

Os alunos devem chegar ao resultado por tentativas:

1º quadrado $\to$ 1 cm de lado,

3º quadrado $\to$ 2 cm de lado,

5º quadrado $\to$ 4 cm de lado,

....

59º quadrado $\to$ 536.870.912 cm (= 2^{29})

61º quadrado $\to$ 1.073.741.824 cm (= 2^{30})

Logo o 61º quadrado já tem lado maior que 800.000.000 cm que é igual 8.000 km.

Como uma calculadora, sem função exponencial, não resolve o problema, temos uma motivação para tentar obter uma solução rápida e fácil (associo essa procura às biografias de grandes astrônomos e físicos que passaram vidas inteiras fazendo cálculos para obterem seus resultados) utilizando os logaritmos:

Se n é ímpar da forma $n = 2k + 1$, então o n-ésimo quadrado tem $2^{\frac{n-1}{2}}$ cm de lado e queremos n de modo que $2^{\frac{n-1}{2}} = 800\,000\,000$ cm, logo

$$\log 2^{\frac{n-1}{2}} = \log(8 \times 10^8),$$

ou

$$\frac{n-1}{2}\log 2 = \log 8 + 8 = \log 2^3 + 8 = 3\log 2 + 8,$$

o que implica

$$\left(\frac{n-1}{2} - 3\right)\log 2 = 8 \quad \text{ou} \quad \left(\frac{n-1}{2} - 3\right) \times 0{,}30103 \cong 8,$$

de onde obtemos n aproximadamente igual a 60,6.

A regra dos 70

Adaptado do artigo de
Antonio Carlos Gilli Martins

Dias atrás presenciei uma conversa, na qual um cliente perguntava ao gerente de um banco, quanto tempo levaria para duplicar uma quantia a ser aplicada a uma taxa de i% ao mês. O gerente respondeu que esse tempo d é obtido, de forma aproximada, por $d = 70/i$ anos. Por exemplo, se a taxa de juros é de 14% ao ano, o tempo de duplicação é de aproximadamente $70/14 = 5$ anos. Já a uma taxa de 6% ao ano, o tempo de duplicação é de aproximadamente $70/6 \approx 11{,}7$ anos.

Eu, muito curioso, pedi ao gerente uma explicação para o cálculo, e ele me disse que "era uma regra usada em finanças, conhecida como a regra dos 70". O porquê do 70 ele não sabia, mas dava certo.

Regra dos 70

Para calcular o tempo aproximado de duplicação de um investimento, divida 70 *pela taxa percentual anual de juros.*

Vamos justificar o cálculo do gerente. Para isso, usaremos a função logaritmo natural de x, $x > 0$, denotada por $\ln(x)$, que pode ser definida como sendo a função inversa da exponencial e^x.

Logo, "o *logaritmo natural* de x é a potência de e necessária para se obter x", isto é,

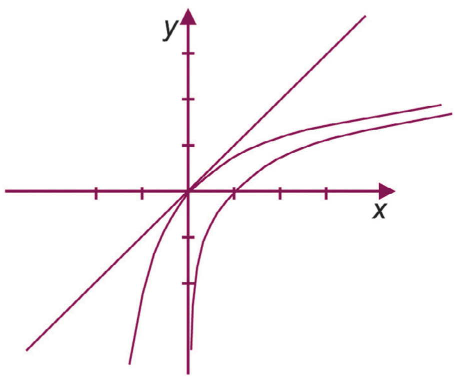
$$y = \ln(x) \Leftrightarrow x = e^y.$$

Precisamos de uma forma prática para calcular o valor numérico do logaritmo, mesmo que aproximado. Podemos usar a expressão a seguir que pode ser encontrada em textos de Cálculo Diferencial e Integral:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \text{ para } -1 < x < 1.$$

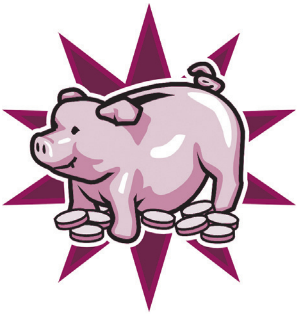
Tal expressão, conhecida como a série de Taylor da função $\ln(1 + x)$, permite a aproximação $\ln(1 + x) \approx x$ para valores de x positivos e próximos de 0.

Podemos também perceber essa aproximação graficamente:



Os gráficos das funções $y = \ln(x)$, $y = \ln(1 + x)$ e $y = x$, fornecem uma justificativa gráfica para a aproximação $\ln(1 + x) \approx x$.

Voltemos à regra dos 70.



Um capital C, aplicado à taxa anual de i%, transforma-se, após 1 ano, em $C(1) = C + \frac{i}{100}C = C\left(1+\frac{i}{100}\right)$.

Após dois anos teremos

$$C(2) = C(1) + \frac{i}{100}C(1) = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^2.$$

De forma geral, após t anos teremos $C(t) = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$.

Logo, o tempo d necessário para duplicação do capital é obtido da equação:

$$2C = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^d \quad \text{ou} \quad 2 = \left(1+\frac{i}{100}\right)^d,$$

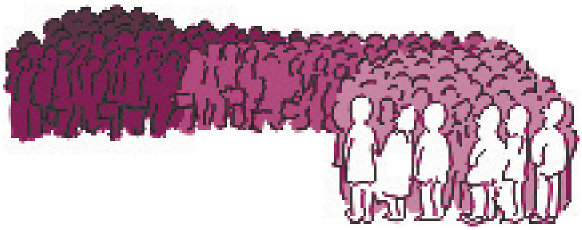
que implica

$$d = \frac{\ln(2)}{\ln(1+i/100)}.$$

Usando a aproximação mencionada para o cálculo de $\ln(1+\frac{i}{100})$, tem-se $\ln(1+\frac{i}{100}) \approx \frac{i}{100}$, e sendo $\ln(2) \approx 0{,}70$, podemos escrever $d = \frac{0{,}70}{\frac{i}{100}} = \frac{70}{i}$, como estabelecido na regra dos 70.

Na verdade, a regra dos 70 vale sempre que houver um crescimento exponencial (como em $C(t) = C\left(1+\frac{i}{100}\right)^t$), com taxa de crescimento relativamente pequena. Por exemplo, se a taxa de crescimento da população de um país é de 3,5% ao ano, então a população dobrará em aproximadamente

$$d = \frac{70}{3,5} = 20 \text{ anos.}$$



A regra também vale para estimar a meia-vida de uma quantidade Q, que decai exponencialmente com taxa de decrescimento de i% ao ano.

Após t anos, o valor da quantidade será $Q(t) = Q\left(1 - \frac{i}{100}\right)^t$.

A meia-vida é o valor t tal que $Q(t) = \frac{1}{2}Q$, o que implica

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{i}{100}\right)^t \quad \text{ou} \quad \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2) = -\ln(2) = t\ln(1 - \frac{i}{100}) \text{ e,}$$

então, $t = \dfrac{\ln(2)}{\ln(1 - \frac{i}{100})} \approx \dfrac{70}{i}$, pois para valores pequenos de x, vale a aproximação $\ln(1 - x) \approx -x$.

A interpretação gráfica e o ensino de funções

Adaptado do artigo de
Katia Cristina Stocco Smole
Marília Ramos Centurión
Maria Ignez de S. Vieira Diniz

Vamos discutir um pouco sobre o ensino de funções, tendo em vista que este tópico se apresenta tardiamente nos currículos de Matemática. Assim, o estudante só tem acesso à representação gráfica no final do ensino fundamental, encontrando grande dificuldade na interpretação de gráficos.

No entanto, este instrumento rico em possibilidades de abordagens e colocações pode ser explorado já nas primeiras séries do ensino fundamental, com o objetivo de familiarizar o aluno com a interpretação de gráficos e o conceito de função.

Na verdade, qual é o conceito de função que esperamos passar aos nossos alunos?

Função é uma lei ou associação entre dois conjuntos, que a cada elemento do primeiro conjunto associa um único elemento do outro. Intuitivamente, uma função é uma espécie de máquina na qual colocamos um certo dado (o elemento do primeiro conjunto) e ela atua sobre este dado e nos dá uma resposta que depende dele (elemento do segundo conjunto).

Tendo isso em mente, as atividades em sala de aula podem ser orientadas no sentido de assegurar a apropriação do aluno desses conhecimentos, antes do estudo de funções, como se encontra nos atuais livros didáticos.

Nossa sugestão é, a partir de problemas concretos e interessantes, construir e interpretar tabelas e gráficos, sendo que as situações apresentadas devem sempre se reportar ao universo mais próximo do aluno.

O trabalho com gráficos, quando introduzido nas primeiras séries escolares, se presta como instrumento complementar das atividades de classificação, ordenação e visualização das operações aritméticas simples.

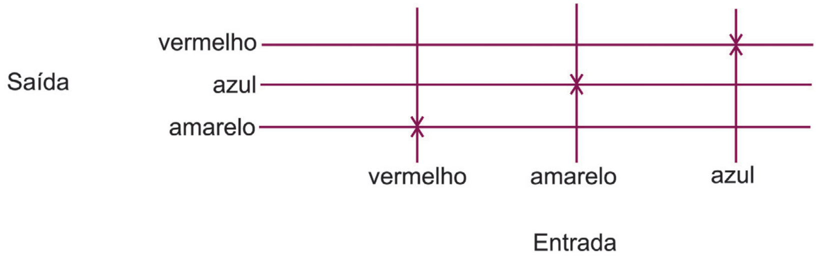
As atividades que proporemos a seguir baseiam-se no princípio de que, para aprender eficazmente, a criança precisa participar dos acontecimentos, em vez de ser apenas expectadora, pois a experimentação pode fornecer oportunidades para a descoberta e a formulação de leis e propriedades.

Atividade 1

São dados seis cartões coloridos, dois de cada uma das cores: vermelho, azul e amarelo. Vamos estabelecer um modelo gráfico para representar a seguinte associação:

vermelho	→	amarelo
amarelo	→	azul
azul	→	vermelho

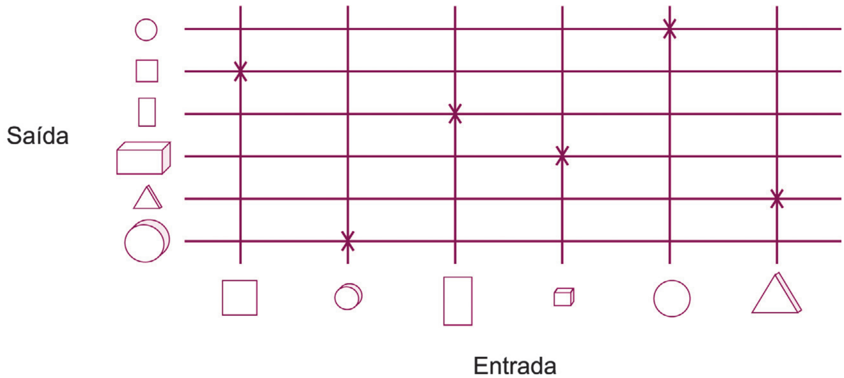
O que se espera obter é um gráfico semelhante a:



Atividade 2

Utilizando como material blocos lógicos (ou outro material similar), vamos estabelecer com a classe o uso de um sistema gráfico para a representação da seguinte associação entre os blocos: a cada bloco associamos outro semelhante em todas as características mas de tamanho diferente.

Teremos um gráfico como o que segue:

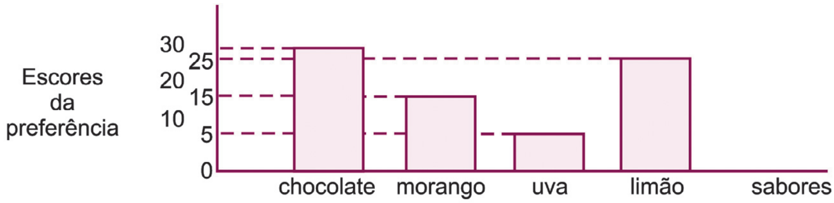


Nestas duas atividades, estamos utilizando materiais comumente empregados nas primeiras séries do ensino fundamental para trabalhar com classificação e agrupamento. O fato novo introduzido é aquele que leva o aluno a estabelecer o registro de suas observações, em forma de tabelas e gráficos.

Atividade 3

Propor a seguinte situação: *Considerando que todos os alunos tomam sorvete e que, no entanto, nem todos gostam do mesmo sabor,* *como deverá o sorveteiro organizar um estoque de sorvetes de modo a agradar a todos?*

Com base nesse questionamento, o aluno deverá realizar uma pesquisa de preferência de sabores entre os colegas (a consulta pode se restringir a algumas classes da escola), fazer a tabulação dos dados e a confecção de um gráfico de barras ou colunas. É interessante notar que os gráficos de barras e colunas devem ser utilizados nas aulas de Matemática, não só para que o aluno entenda este tipo de gráfico, muito usado nos meios de comunicação, mas para que o tenha também como um instrumento a mais para alcançar o conceito de função, já que, tradicionalmente, o professor se restringe apenas às retas e parábolas. Mas, continuando, suponhamos que, após a tabulação, apareça um gráfico semelhante ao desenhado abaixo:



O aluno poderá, então, formular uma hipótese e compará-la à forma como o sorveteiro efetivamente organiza seu estoque.

Atividade 4

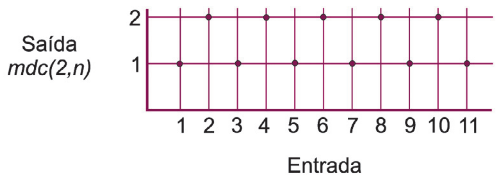
Após o estudo das primeiras operações, podemos sugerir as representações das seguintes "máquinas" atuando sobre números naturais:

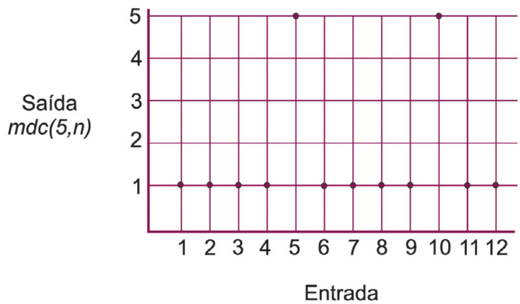
Observando os resultados obtidos ao introduzirmos alguns números, esperamos chegar aos seguintes gráficos, que são exemplos de funções crescentes:

Nesta atividade, ao contrário das anteriores, passa a ser conveniente uma ordenação nos *dois eixos* para que possamos visualizar o comportamento das funções. Uma outra coisa interessante é que, por ser N o conjunto utilizado, a representação é feita apenas por pontos, mas estes podem ser unidos para ajudar a visualizar o crescimento das funções. Observe que, propositalmente, foram usadas escalas diferentes nos dois eixos.

Atividade 5

Determinar os gráficos das leis que a cada número natural n associam $mdc(2, n)$, ou $mdc(5, n)$, explorando o conceito de função periódica.



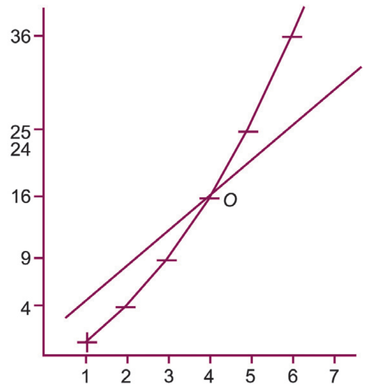


Atividade 6

Feito o estudo de área e perímetro do quadrado, podemos propor que, com base no quadrado de lado 1 unidade, o aluno construa a tabela ao lado.

Medida do lado (L)	1	2	3	
Perímetro ($P = 4L$)	4	8		
Área ($A = L^2$)	1	4		

Pronta a tabela, a próxima etapa é representar ambos os valores da área e do perímetro para cada valor do lado, num mesmo par de eixos.



Unindo os pontos obtidos, teremos um gráfico comparativo da evolução do perímetro e da área de um quadrado, com base na medida de seu lado.

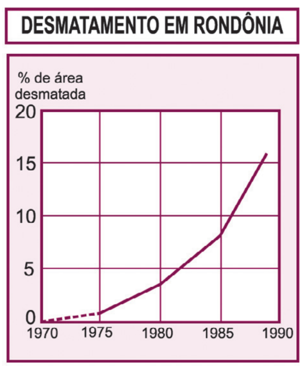
Podemos colocar as seguintes questões:

- O que é maior: a área ou o perímetro de um quadrado?
- Observando o ponto *O,* que conclusões podemos tirar?

Atividade 7

Observando o gráfico, responda:

1. Do que trata o gráfico?
2. De 1970 a 1990 o desmatamento em Rondônia aumentou ou diminuiu?
3. Qual a porcentagem aproximada da área desmatada entre 1980 e 1985?
4. Se tudo continuar assim, em 1990 qual será, aproximadamente, a porcentagem da área desmatada?
5. Em que ano a área desmatada atingiu 10%?
6. Por que entre 1970 e 1975 o gráfico está tão próximo à linha onde estão marcados os anos?
7. Qual o valor máximo que a porcentagem da área desmatada poderá atingir?

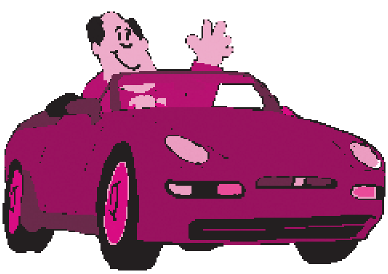


(Folha de São Paulo 12/02/89)

Funções e gráficos num problema de freagem

Adaptado do artigo de
Geraldo Ávila

Há situações concretas das quais o professor pode extrair, de maneira espontânea e natural, conceitos importantes e muito úteis como os de *variável* e *função*. Ilustraremos isso com um exemplo concreto bem simples e que, quando examinado do ponto de vista da *variabilidade* das grandezas envolvidas, dá margem a conclusões interessantes e relevantes nas aplicações.



Um problema de freagem

Comecemos com a formulação de uma questão simples:

Um automóvel, a 30 km/h, é freado e pára depois de percorrer mais 8 metros. Se freado a 60 km/h, quantos metros percorrerá até parar?

Se proposto dessa maneira, o aluno poderá pensar que as grandezas aí envolvidas – velocidade V e a distância D percorrida até parar – são diretamente proporcionais e achar que a resposta é 16 *m*. Mas isto é falso. O certo é que a *distância é proporcional ao quadrado* *da velocidade*, pelo menos dentro de certos limites de velocidade, e isso precisa ser dito explicitamente no enunciado do problema. Essa lei significa que se D_1 e D_2 são as distâncias correspondentes, respectivamente, às velocidades V_1 e V_2, então

$$\frac{D_1}{V_1^2} = \frac{D_2}{V_2^2}. \qquad (1)$$

Com os dados concretos do nosso problema, se tomarmos $V_1 = 30$ *km/h*, então $D_1 = 8$ *m*; e se pusermos $V_2 = 60$ *km/h*, teremos a equação

$$\frac{8}{30^2} = \frac{D_2}{60^2}$$

para determinar a distância D_2, correspondente à velocidade de freagem $V_2 = 60$ *km/h*. Resolvendo a equação, obtemos

$$D_2 = \frac{8 \times 60^2}{30^2} = 32 \text{ metros.}$$

(Observe que não há necessidade de reduzir as velocidades de *km/h* a *m/h* ou *m/s;* o importante é que elas sejam todas expressas na mesma unidade. A distância procurada, evidentemente, virá expressa em *metros,* como a outra distância dada.)

Vale a pena reparar no aumento da distância de freagem, que passou de 8 para 32 metros – *quadriplicou* – quando a velocidade foi de 30 para 60 *km/h* – *duplicou.* Mas, desse cálculo isolado, não podemos concluir que será sempre assim. Se quisermos saber o que ocorre com outras velocidades, podemos fazer novos cálculos, usando o mesmo raciocínio e, é até um exercício interessante, calcular as distâncias de freagem correspondentes a várias velocidades, como 40, 60, 80, 100, 120 *km/h.*

Mais do que isso, podemos construir uma tabela numérica de velocidades e distâncias correspondentes e uma representação gráfica, marcando as velocidades num eixo horizontal e as distâncias num eixo vertical. Isso permitirá compreender melhor o que está acontecendo com a distância de freagem, à medida que a velocidade aumenta.

O procedimento que propomos – de repetir cálculo após cálculo, com diferentes valores da velocidade – é um passo no sentido de "variar" a velocidade V e observar os valores correspondentes da distância de freagem D. Melhor que todos os cálculos, porém, é contemplar, em sua plenitude, a relação de dependência dessas duas grandezas V e D, pois só assim estaremos permitindo que V assuma *qualquer valor* numérico (positivo) e, em conseqüência, só assim poderemos examinar a maneira como D varia *em função de V.* Para isso, devemos notar que a proporcionalidade (1) significa o mesmo que a equação

$$D = kV^2. \qquad (2)$$

Sejam $V = V_0 = 30\,km/h$ e $D = D_0 = 8\ m$. Observemos agora o que acontece quando multiplicamos V_0 por um número qualquer c. Obtemos um valor correspondente D tal que, segundo a equação (2),

$$D = k(cV_0)^2 = c^2(kV_0^2).$$

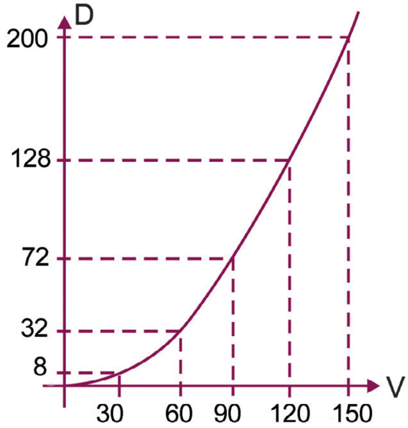
Mas $kV_0^2 = D_0$, de sorte que $D = c^2D_0$. Vemos assim que *multiplicando-se V_0 por c, D_0 deverá ser multiplicado por c^2.* Por exemplo, se multiplicarmos V_0 por 2, 3, 4, 5, etc, D_0 será multiplicado por 4, 9, 16, 25, etc, respectivamente. Indicamos isso no quadro seguinte:

V	V_0	$2V_0$	$3V_0$	$4V_0$	$5V_0$
D	D_0	$4D_0$	$9D_0$	$16D_0$	$25D_0$

Vamos fazer um gráfico, marcando os valores de V num eixo horizontal e os correspondentes valores de D num eixo vertical. A curva assim obtida – deve-se dizer aos alunos – é uma *parábola.* Com $V_0 = 30\ km/h$ e $D_0 = 8$ metros, o quadro de valores acima passa a ser o seguinte:

V	30	60	90	120	150
D	8	32	72	128	200

O leitor deve observar atentamente o gráfico e os quadros para bem entender o efeito da velocidade de um automóvel na distância em que ele ainda percorre até parar, desde o momento em que o motorista utiliza os freios.



Quando a velocidade duplica, triplica, quadruplica etc., a distância de freagem fica multiplicada por 4, 9, 16, etc., o que mostra o perigo das altas velocidades.

É evidente, da discussão anterior, que a equação $D = kV^2$ nos dá uma visão muito mais ampla e clara de como as variáveis V e D estão relacionadas do que quaisquer cálculos numéricos isolados. E isso, justamente, porque estamos contemplando, nessa equação, a relação de interdependência funcional das *variáveis* V e D, já que agora V pode assumir qualquer valor positivo, sendo assim uma *variável independente;* e D assume também todos os valores positivos, como *variável dependente,* pois cada um de seus valores é determinado por algum valor de V.

A regra do guarda rodoviário e um teste da revista Quatro Rodas

Um professor de Campinas, SP, contou-nos que já exerceu a profissão de guarda rodoviário antes de se tornar professor de Matemática. E, segundo nos explicou, o guarda rodoviário tem uma

A revista *Quatro Rodas* costuma publicar tabelas dos testes que realiza com diferentes veículos. Uma dessas tabelas, referente ao Fiat Uno, quando de seu lançamento, é a seguinte:

V	40	60	80	100	120
D	8,2	18,1	31,8	50,3	71,4

Isso equivale, praticamente, a tomar $k = 1/200$ na equação (2), pois então obtemos a seguinte tabela, muito próxima da anterior.

V	40	60	80	100	120
D	8	18	32	50	72

O leitor deve observar que com o dobro do valor usado para construir esta última tabela (pois $1/100$ = duas vezes $1/200$), o guarda rodoviário obtém valores duplicados das distâncias correspondentes ao Fiat Uno. Um exagero?

Talvez não, se levarmos em conta que ele está preocupado com segurança, imaginando um motorista que, subitamente, sem estar preparado para uma freagem encontra-se numa situação de ter de parar rapidamente o carro.

Neste caso, é preciso levar em conta outros fatores, como o tempo decorrido entre o instante em que ele primeiro percebe a necessidade da freagem e o momento em que começa a pressionar o pedal do freio. E será que ele pressionará o freio tanto quanto o motorista de uma pista de provas?

Um começo sobre funções

Exemplos como este que discutimos aqui servem para mostrar que o estudo das funções, na sua fase mais elementar, poderia iniciar-se, e com grande vantagem, na sexta série, logo após o (ou simultaneamente ao) estudo das equações. De fato, ao estudar equações a duas incógnitas, é da maior conveniência ensinar sua representação gráfica.

Começando com exemplos simples, como $x - y = 0$ ou $y = x$;

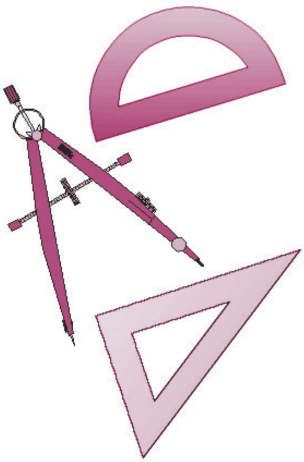
$x - y + 1 = 0$ ou $y = x + 1$; $y = 2x$; $y = 3x/2$, $y = 2x + 1$, etc,

o aluno pode ser levado, por um processo gradual de aprendizado, a descobrir, por si próprio, que *toda equação do primeiro grau a duas incógnitas tem por representação gráfica uma linha reta.*

A equação escrita na forma $y = mx + n$ sugere, naturalmente, a idéia de "variar x arbitrariamente" e procurar os valores correspondentes de y. Ora, nisso estão contidas as noções de *variável independente* e *variável dependente* numa relação funcional.

Ensinando Trigonometria por meio da imagem

Adaptado do artigo de
Abdala Gannam



*S*abemos que, ao lidar com a Trigonometria no círculo, devemos ter em mente uma série de elementos que se relacionam concomitantemente (círculo orientado, origem e extremidade de arcos, eixos cartesianos, ordenadas, abscissas etc.). Não seria a relação entre numerosos elementos uma das causas da dificuldade que os alunos sentem ao estudar Trigonometria? A utilização de um dispositivo que fixasse algumas variáveis, enquanto a atenção se direcionasse para uma ou duas outras, não poderia resultar em um melhor entendimento da questão?

Foi tentando verificar a validade desta conjetura que elaborei uma transparência que, adequadamente apresentada por meio de um retroprojetor, vem trazendo resultados satisfatórios.

Descrição do material

1. *Transparência T_1*

Faça o desenho da Figura 1 numa folha de papel vegetal, tamanho ofício, usando de preferência letras e números adesivos e tinta nanquim. Dimensões: raio 5 cm; letras, 4,2 mm; números, 2,5 mm. Faça uma cópia do desenho e mande reproduzi-lo numa folha de acetato especial, o que pode ser feito em lojas copiadoras.

2. *Transparência T_2*

Numa folha de acetato comum, tamanho ofício, desenhe uma circunferência de raio de 10 cm, marque um ponto a 5 cm do centro e ligue o centro com esse ponto (Figura 2). Não coloque as letras no desenho. Recorte o círculo.

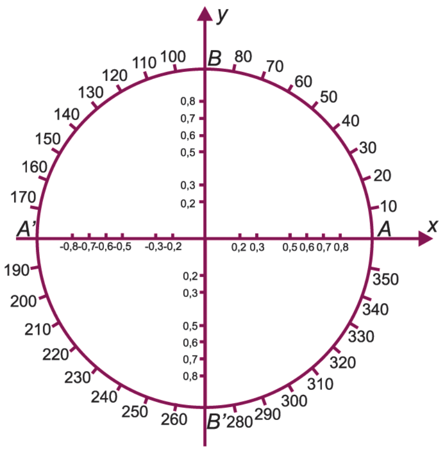


Figura 1

Transparência T_1

Círculo trigonométrico de raio igual a 5 cm, dividido em 36 partes graduadas de 10 em 10 graus. Eixos graduados para senos e cossenos dos arcos correspondentes.

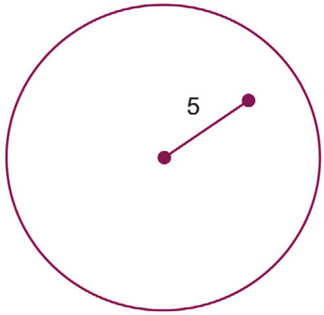


Figura 2

Transparência T_2

Circunferência de raio de 10 cm.

3. *Transparência T_3*

Numa folha de acetato, de preferência bem rígida, faça o furo indicado na Figura 3. Os números indicam a posição do furo *P*. Não coloque os números nem as setas no desenho. Trace um segmento de 5 cm, com origem no furo em qualquer direção.

Transparência secundária (T_3), mostrandoo espaço entre o furo e as bordas, em centímetros.

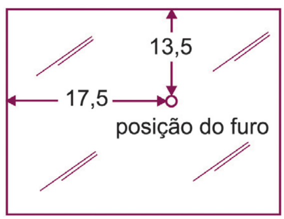


Figura 3

4. *Moldura de cartão*

Moldura de papel cartão, dimensões em centímetros.

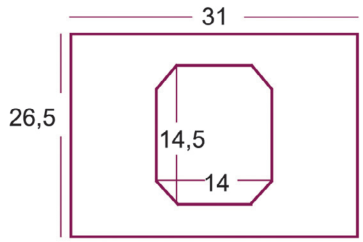


Figura 4

Com fita adesiva, pregue no verso da moldura de cartão a transparência T_1, centralizando o círculo. Coloque a transparência T_2 sobre a moldura já com a transparência T_1 e, com um alfinete, fixe os centros das circunferências, de modo que elas possam girar em torno do alfinete. Em seguida, coloque T_3 sobre o conjunto T_1, T_2 (Figura 5) e com outro alfinete fixe-a na transparência T_2, de modo que as transparências possam girar facilmente.

Corte os alfinetes rentes às transparências, rebitando-os a seguir.

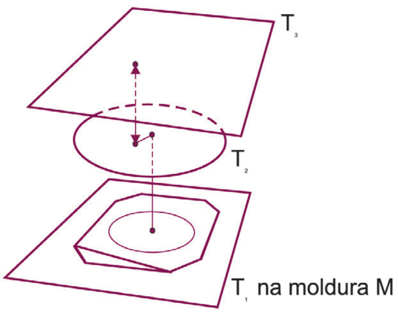


Figura 5

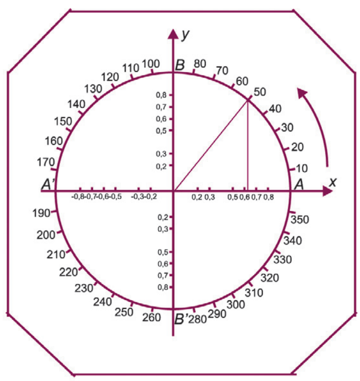


Figura 6

Deslocando a transparência T_3, mantendo fixa a moldura, um ponto se deslocará sobre a circunferência, "levando consigo" a sua projeção sobre um dos eixos, onde aparecerão os valores dos cossenos ou dos senos (Figura 6).

A transparência, projetada por meio de um retroprojetor, fornecerá uma imagem nítida e dinâmica.

Seno de 30 é um meio?

Adaptado do artigo de
Renate Watanabe

Acontecem fatos estranhos quando se ensina Trigonometria:

- Observe as tabelas abaixo, contendo alguns valores de duas funções *f* e *g*.

x	*f(x)*
0,1	0,00174
0,2	0,00349
0,3	0,00524
0,5	0,00873
1,0	0.01745

x	*g(x)*
0,1	0,099
0,2	0,198
0,3	0,295
0,5	0,479
1,0	0,841

As duas funções não são iguais; no entanto, em nossas aulas, chamamos ambas de ***seno.***

- Sempre medimos ângulos e arcos em ***graus.*** Por que, de repente, no ensino médio, resolvemos medir arcos em ***radianos***?... e, fora da trigonometria, continuamos usando graus?

- Se numa calculadora apertarmos os botões "π", "seno", "=" e, depois, "180", "seno", "=", os dois resultados não deveriam ser "zero"? Pois não são.
- Quanto vale seno 1?

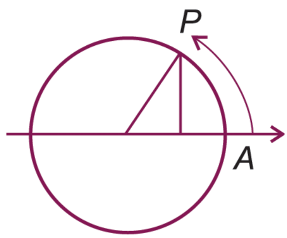
Este artigo vai tentar esclarecer essas questões. Falaremos apenas do "seno", mas o que for dito se estende às demais funções trigonométricas.

Trigonometria no ensino médio

A transição das razões trigonométricas no triângulo retângulo para funções periódicas de domínio R, de aplicações mais amplas, começou com *Viète,* no século XVI, e culminou nos trabalhos de *Euler,* no século XVIII.

Fazemos essa transição no ensino médio, quando apresentamos as "funções circulares". Com pequenas variações na linguagem, procedemos da seguinte maneira para "ampliar" a função ***Seno***.

- No plano cartesiano, considera-se a circunferência de centro na origem e raio unitário.
- Dado um número x entre 0 e 360, associa-se a esse número um ponto P da circunferência tal que a medida em graus do arco orientado que começa em $A = (1, 0)$ e termina em P seja x. (Arco orientado e $x > 0$ significa que o percurso de A até P deve ser feito no sentido anti-horário.)



- Seno x = ordenada de P.
- Se x for negativo, ou maior do que 360, então Seno x = Seno r, onde $x = 360q + r$, com $q \in Z$ e $0 \leq r < 360$.

Essa função ***Seno*** (denotada por $f(x)$ no início do artigo), de domínio R, periódica, atendeu às necessidades da Física, mas apresenta um grande inconveniente na parte referente a cálculos.

O estudo de fenômenos físicos quase sempre requer o uso de equações diferenciais, isto é, de derivadas. Acontece que a derivada da função Seno é igual a $\frac{?}{180}$ Cosseno.

Eis porque:

x	*seno x*	*(Seno x)/x*
1,0	0,0174524	0,017452
0,5	0,0087265	0,017453
0,3	0,0052360	0,017453
0,2	0,0034907	0,017453
0,1	0,0017453	0,017453

A tabela ao lado mostra que os valores de (Seno x)/x, para x próximo de 0, ficam próximos de 0,01745. Pode-se demonstrar que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\text{Seno}x}{x}=\frac{\pi}{180}\approx 0{,}01745..$$

Lembrando a definição de derivada, temos:

$$(\text{Seno}x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{Seno}(x+\Delta x)-\text{Seno}x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\text{Seno}\frac{\Delta x}{2}-\text{Cos}\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{Seno}\frac{\Delta x}{2}-\text{Seno}x}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\text{Cos}\frac{2x+\Delta x}{2}\approx 0{,}01745\text{Cos}x.$$

Teria sido muita sorte mesmo, se a função ***Seno*** tivesse uma derivada “agradável”. Afinal, sua definição depende da de *grau,* e essa unidade foi criada pelos babilônios (~ 400 a.C.), que, por razões até hoje não totalmente esclarecidas, usavam o sistema sexagesimal.

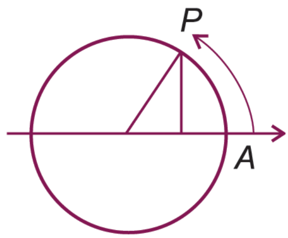
A inconveniência de se carregar essa constante $\pi/180$ nos cálculos propiciou a criação de uma nova função ***seno***, com as mesmas propriedades da anterior, e cuja derivada é a função cosseno. Designaremos essa função por ***seno***, com s minúsculo.

No ensino médio essa nova função pode ser assim definida:

- No plano cartesiano, considera-se a circunferência de centro na origem e raio unitário (isto é, a circunferência passa pelo ponto (1,0) e o seu raio passa a ser a unidade de medida).
- Dado um número x, efetua-se sobre a circunferência, a partir de $A = (1,0)$, um percurso de comprimento x (no sentido anti-horário, se $x > 0$ e no sentido horário, se $x < 0$). Seja P *o* ponto de chegada.
- ***seno x*** = ordenada de P.

Essa função ***seno*** (denotada por $g(x)$ no início do artigo) tem todas as propriedades da anterior e a seguinte vantagem, que pode ser vista tanto na figura como na tabela a seguir:

x	***seno x***	***(Seno x)/x***
0,5	0,47943	0,9588
0,3	0,29552	0,985
0,2	0,19867	0,993
0,1	0,09983	0,998
0,1	0,0017453	0,017453



Quando P se aproxima de A, os comprimentos do segmento CP e do arco AP tomam-se praticamente iguais.

Pode-se provar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{seno}x}{x} = 1 \text{ e daí, } (\text{seno } x)' = \cos x.$$

E é esse o motivo por que, fora da Geometria, apenas essa função ***seno*** *é* usada.

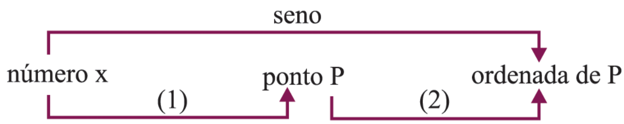
Aqui cabem algumas observações:

1. Na definição dada, para $0 < x < 2\pi$, x é a medida *em radianos* do arco orientado *AP.* Mas, como se viu, não foi necessário introduzir o radiano para definir a função seno. A palavra *radiano* data de 1873, e é uma criação posterior à da função ***seno***. Aparentemente, veio da fusão das palavras *radial angle,* que originou *radiem*, em inglês e radiano, em português.
2. Pode-se definir a função ***seno*** (e as demais funções trigonométricas) sem fazer alusão a arcos, ângulos ou percursos (ver, por exemplo, *Análise real,* de Elon Lages Lima, IMPA, vol. l, p. 162).
3. Já que a função ***Seno**,* de domínio *R*, não tem utilidade, pode-se definir ***Seno*** de um ***ângulo*** e, daí, passar diretamente para a função *seno* (ver, por exemplo, *Cálculo,* de Serge Lang, vol. l, p. 81).

Em resumo

Para definir ***seno*** de um número *x,* no ensino médio, efetua-se, na verdade, a composição de duas funções:

- uma, que ao número *x* associa um ponto *P* da circunferência,
- e outra, que a esse ponto *P* associa sua ordenada.



O problema está na associação (l), que costuma ser feita de dois modos:

- a *x* associa-se *P* tal que o arco *AP* mede *x* graus;
- a *x* associa-se *P* tal que o arco *AP* mede *x* radianos.

No primeiro caso fica definida a função ***Seno*** e, no segundo, a função ***seno***.

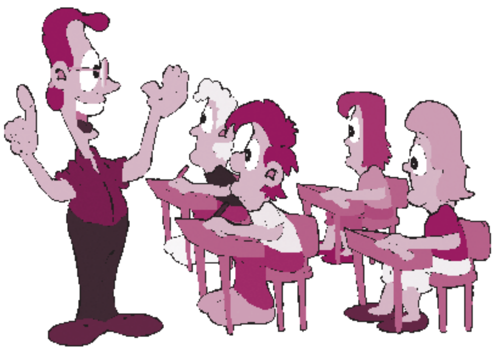
E na sala de aula?

Alguns livros didáticos, lançados em outros países, reconhecem a existência das duas funções e usam símbolos diferentes para representá-las.

No Brasil há uma espécie de "acordo de cavalheiros". Quando a palavra *seno* aparece na frente de números como 30, 45, 180 etc., assumimos tratar-se da função ***Seno***. Se essa mesma palavra aparece na frente de números como π, 2π/3, π/6 etc., assumimos tratar-se da função *seno*... e evitamos perguntar quanto vale o seno de 1 para não criar confusão.

Quando pedimos aos nossos alunos que resolvam a equação sen $x = 0$, aceitamos como corretas as soluções $x = k\pi$ ou $x = k\,180$, mas reclamamos, é claro, se o aluno disser que $\pi = 180$.

Uma possível saída é usar sempre o símbolo "grau" quando se trata da função ***Seno***, isto é, escrever sen 30°, sen 45°, sen 500°, sen 1°, (embora ***Seno*** seja uma função de domínio *R*), e reservar o símbolo "sen" para a função ***seno***: sen π, sen $3\pi/4$, sen 1 etc.

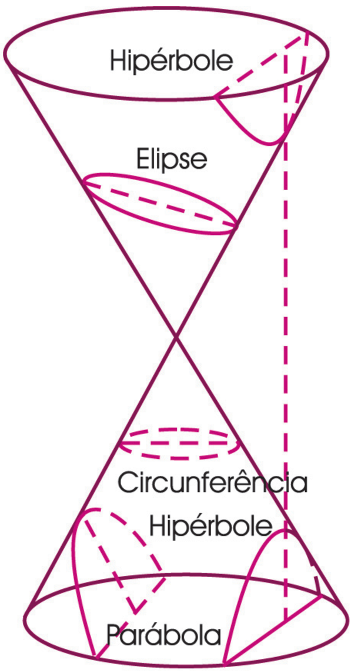


Capítulo 3

Geometria

Por que os nomes elipse, parábola e hipérbole?

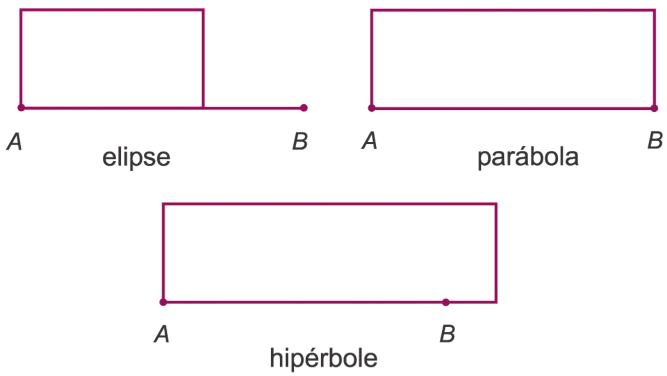
Adaptado do artigo de
Geni Shulz da Silva



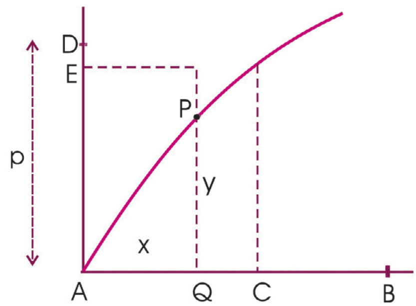
A Menaecmus, por volta de 350 a.C., discípulo e sucessor do matemático Eudoxo na direção da Escola de Cizico (Ásia Menor), atribui-se a invenção das curvas *elipse*, *parábola* e *hipérbole*, por ele construídas mecanicamente e utilizadas na resolução do clássico problema da duplicação do cubo (problema de Delos). Mas foi Apolônio (III séc. a.C.) quem extraiu essas curvas de uma superfície cônica, mediante seções planas. Daí a denominação comum de *seções cônicas*.

Os nomes *elipse*, *parábola* e *hipérbole* foram mesmo usados por Apolônio, que os tirou de uma terminologia pitagórica (VI séc. a.C.) específica para áreas.

Assim, quando os pitagóricos faziam a base de um retângulo ficar sobre um segmento retilíneo de modo que uma extremidade dessa base coincidisse com uma das extremidades do segmento, diziam que tinham um caso de *elipse*, *parábola* ou *hipérbole*, conforme a referida base fosse menor do que o segmento, com ele coincidisse ou o excedesse. E observamos que a razão dessas designações está na própria significação dos termos, pois *elipse* quer dizer *falta*, *parábola* corresponde a *igual* e *hipérbole* exprime *excesso*.



Vejamos agora o fato em relação às curvas em questão. Para isso, consideramos uma cônica de vértice A, como na figura.



Seja P um ponto qualquer da cônica e Q sua projeção ortogonal sobre AB. Pelo vértice A traçamos uma reta perpendicular a AB, sobre a qual tomamos $AD = p$, p um número real positivo previamente dado.

A seguir, construamos um retângulo de base AQ, situada sobre a reta AB, e lado AE sobre AD, de modo que a sua área seja $\overline{PQ}^2$.

Conforme

$$AE < AD, \ AE = AD \ \text{ou} \ AE > AD,$$

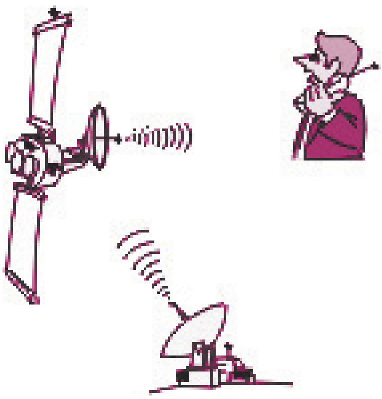
Apolônio denominou a cônica de

elipse, parábola ou hipérbole.

Em outros termos, se considerarmos a curva referida a um sistema cartesiano de eixos coordenados com eixo dos x (abcissas) sobre AB e eixo dos y (ordenadas) sobre AD e se designarmos as coordenadas de P por x e y, a curva será uma *elipse* se $y^2 < px$, uma parábola se $y^2 = px$ e uma *hipérbole* se $y^2 > px$.

Por que as antenas são parabólicas?

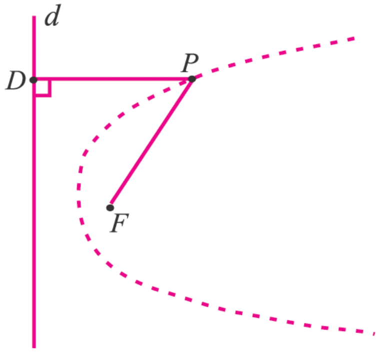
Adaptado do artigo de
Eduardo Wagner



A palavra *parábola* está, para os estudantes do ensino médio, associada ao gráfico da função polinomial do segundo grau. Embora quase todos conheçam as antenas parabólicas, nem todos fazem ligação entre uma coisa e outra. Os espelhos dos telescópios e dos faróis dos automóveis também são parabólicos. Por quê?

Neste artigo, vamos partir da definição geométrica dessa curva chamada parábola, descobrir sua equação e investigar algumas de suas propriedades, que vão justificar por que as antenas e alguns espelhos precisam ser parabólicos.

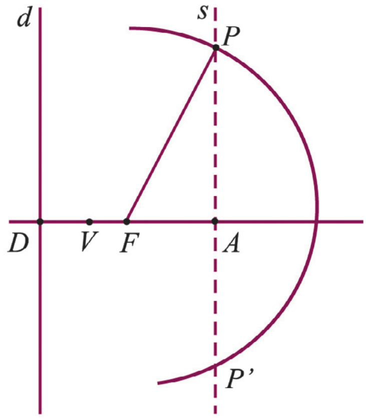
Por questões de simplicidade, tudo o que dissermos de agora em diante passa-se num plano.



Definição

Consideremos uma reta d e um ponto F. Parábola de foco F e diretriz d é o conjunto de todos os pontos cuja distância à reta d é igual à distância ao ponto F.

Na figura, se $PD = PF$, então P é um ponto da parábola de *foco* F e *diretriz* d.



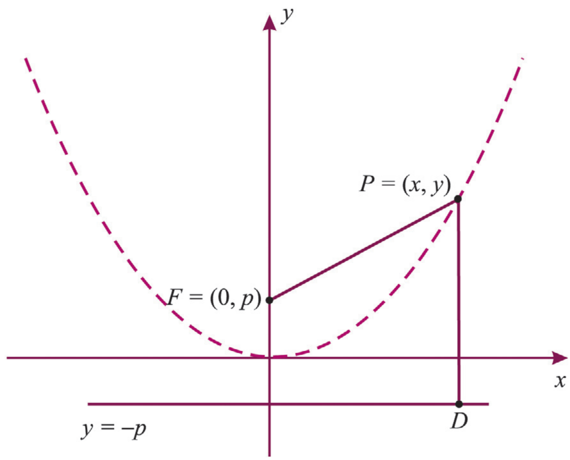
Para obter diversos pontos de uma parábola, dados o foco F e a diretriz d, trace por F uma reta r perpendicular à diretriz, e seja D o ponto de interseção de r e d.

O segmento DF chama-se parâmetro da parábola e o ponto V, médio de DF, é o vértice da parábola. Para cada ponto A da semi-reta VF, trace a reta s, perpendicular à r. A circunferência de centro F e raio AD corta s nos pontos P e P', que pertencem à parábola.

Como $PD = AD$, a distância de P ao foco é igual à sua distância à diretriz.

A equação da parábola

Em um sistema de coordenadas, não é difícil encontrar a equação da parábola, dados o foco e a diretriz. Tomemos $F = (0, p)$ como foco e $y = -p$ como diretriz.



Se $P = (x, y)$ é tal que $PF = PD$, temos:

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = y + p.$$

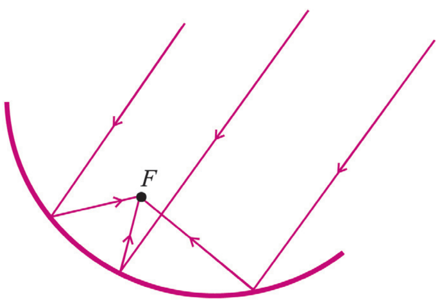
Elevando ao quadrado e cancelando os termos iguais dos dois lados, obtemos: $x^4 = 4py$ ou $y = \dfrac{1}{4p}x^2$, o que mostra que a equação de uma parábola é da forma $y = ax^2$ (um polinômio do segundo grau). Reciprocamente, dada uma função da forma $y = ax^2$, é fácil provar que qualquer um de seus pontos possui distância ao ponto $\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ igual à distância à reta $y = -\frac{1}{4a}$, o que mostra que o gráfico de $y = ax^2$ é uma parábola de foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4a}$.

Com um pouco mais de trabalho, o leitor poderá demonstrar que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ (com $a \neq 0$) é também uma parábola com vértice no ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$.

Antenas e espelhos

Vamos voltar agora às nossas perguntas iniciais. Por que as antenas que captam sinais do espaço são parabólicas? Por que os espelhos dos telescópios astronômicos são parabólicos?

Nos dois exemplos acima, os sinais que recebemos (ondas de rádio ou luz) são muito fracos. Por isso, é necessário captá-los em uma área relativamente grande e concentrá-los em um único ponto para que sejam naturalmente amplificados. Portanto, a superfície da antena (ou do espelho) deve ser tal que todos os sinais recebidos de uma mesma direção sejam direcionados para um único ponto após a reflexão.

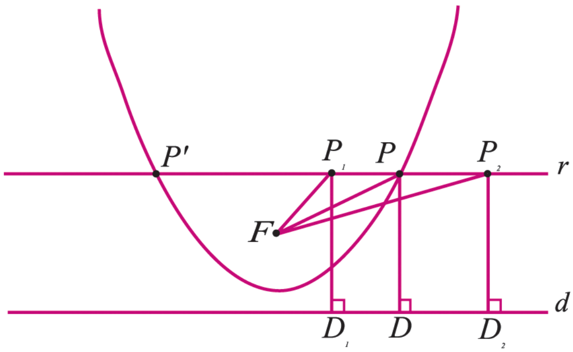


A antena ideal deve dirigir todos os sinais recebidos ao ponto F.

Vamos mostrar que se a superfície for parabólica, essa situação ocorre.

Observação 1

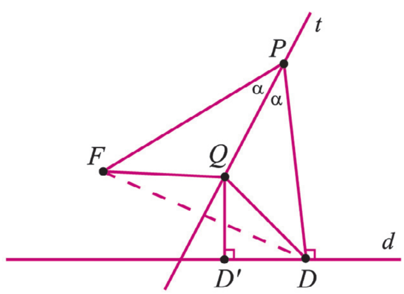
Observemos inicialmente que uma parábola separa os demais pontos do plano em duas regiões: uma, onde cada ponto tem distância ao foco menor que sua distância à diretriz, chamada região interior, e outra, onde a distância de cada ponto ao foco é maior que a distância à diretriz, chamada região exterior.



A figura mostra uma parábola de foco F e diretriz d e uma reta r paralela à d, cortando a curva em P e P'. Se o ponto P_1 da reta r é interior ao segmento PP', então $P_1F < PF = PD = P_1D_1$ e, portanto, P_1 é interior à parábola. Por outro lado, se P_2 é um ponto da reta r, exterior ao segmento PP', então $P_2F < PF = PD = P_2D_2$ e P_2 é exterior à parábola.

Observação 2

Os raios de luz e as ondas de rádio propagam-se no espaço em linha reta. Aliás, isso não é inteiramente verdadeiro, mas para o observador da Terra é aceitável. Quando esses sinais são refletidos em um ponto de uma superfície, tudo se passa como se estivessem sendo refletidos em um plano tangente à superfície nesse ponto, de acordo com a famosa lei da Física: "o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão".

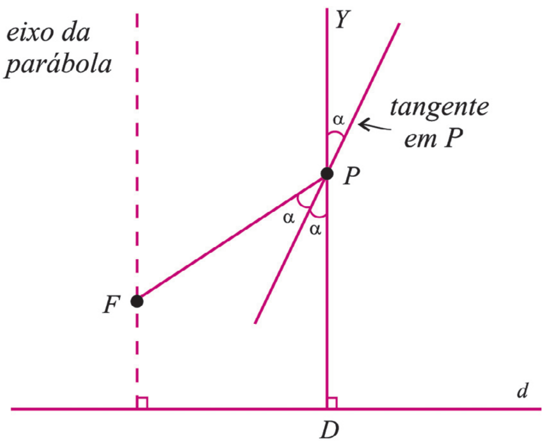


Consideremos um ponto P qualquer da parábola de foco F e diretriz d, e ainda a reta t, bissetriz do ângulo FPD. Vamos mostrar geometricamente que t é tangente à parábola.

No triângulo PFD, como $PF = PD$, a reta t, bissetriz do ângulo PFD, é também mediana e altura. Em outras palavras, a reta t é mediatriz do segmento FD. Seja agora Q, um ponto qualquer da reta t, distinto de P. Se D' é a projeção de Q sobre d, temos:

$$QF = QD > QD'.$$

Portanto, Q é exterior à parábola. Ora, o ponto P da reta t pertence à parábola, e todos os outros pontos de t são exteriores. Logo, t é tangente à parábola em P.



Observe, na figura acima, a semi-reta PY, prolongamento do segmento DP. Como a tangente à parábola em P é bissetriz do ângulo FPD, temos que PY e PF fazem ângulos iguais com essa tangente. Por isso, todo sinal recebido na direção do eixo da parábola toma a direção do foco após a reflexão.

A hipérbole e os telescópios

Adaptado do artigo de
Geraldo Ávila

O artigo anterior trouxe uma interessante propriedade focal da parábola, que é utilizada na construção de refletores e antenas parabólicas. Seria natural que o leitor perguntasse: e a hipérbole? Tem ela propriedade parecida? Sim, tem, e é uma propriedade importante na tecnologia dos telescópios, como explicaremos neste artigo.

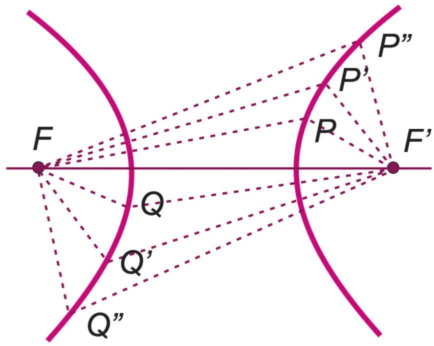
O que é uma hipérbole

As chamadas seções cônicas – *elipse, hipérbole* e *parábola* – são as curvas que se obtêm como intersecção de um cilindro ou cone circular reto com um plano. Outra maneira equivalente de definir essas curvas é a geométrica e se faz em termos da chamada *propriedade focal*. Supondo que estamos trabalhando em um plano, a hipérbole, por exemplo, pode ser definida geométricamente:

Dado um número positivo d e dois pontos F e F', chama-se hipérbole ao lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a F e F' é sempre igual a d.

Assim, P, P', P'', ... são pontos da hipérbole, visto que

$$PF - PF' = P'F - P'F' = P''F - P''F' = \ldots = d.$$



Do mesmo modo, Q, Q', Q'', ..., satisfazendo as condições,

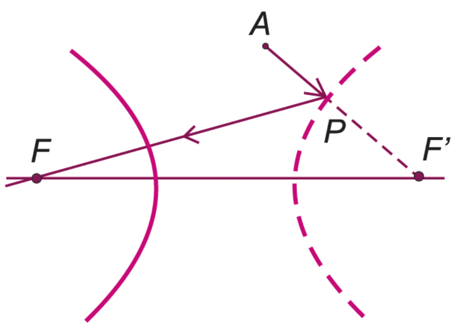
$$QF' - QF = Q'F' - Q'F = Q''F' - Q''F = \ldots = d$$

também pertencem à hipérbole, a qual, portanto, possui dois ramos distintos.

Os pontos F e F' são chamados *focos* da hipérbole.

Reflexão da luz

Vamos imaginar um espelho refletor construído com o formato de um ramo de hipérbole, estando a parte refletora do “lado de fora” da hipérbole, isto é, na sua parte côncava.



Suponhamos que um raio de luz proveniente de um ponto A incida no espelho em P, como ilustra a figura, de forma que a reta AP passe pelo foco F'. Então é possível mostrar, de forma análoga ao feito para a parábola no artigo anterior a este, que o raio refletido passará pelo outro foco F. O leitor interessado pode encontrar a demonstração dessa propriedade, por exemplo, no número 34 da RPM. Vamos ver uma de suas aplicações na construção de telescópios.

Telescópios refletores

Galileu Galilei (1564-1642) foi o primeiro cientista a construir um telescópio para observação astronômica. Isso se deu em 1609 e resultou em notáveis descobertas: Galileu viu montanhas e acidentes geográficos na superfície lunar, observou que Vênus passa por fases como a Lua, notou que Saturno tem um formato alongado (devido a seus anéis), e que Júpiter possui satélites girando a sua volta. Em pouco tempo Galileu revolucionou a Astronomia.

Galileu Galilei

Os primeiros telescópios, inclusive o de Galileu, foram construídos com lentes e funcionavam com base na refração da luz. São os chamados *telescópios refratores*.

Acontece que as lentes têm vários inconvenientes, como as deformações das imagens que elas produzem, fenômeno que pode ser facilmente observado com qualquer lente de grau de óculos comuns; basta olhar através da lente e movê-la transversalmente para um lado e para o outro, ou em círculos, para notar essas deformações.

Além disso, a lente também atua como um prisma, decompondo a luz branca em várias cores, produzindo outro tipo de efeito indesejável nas observações, as chamadas aberrações cromáticas.

Esses inconvenientes dos telescópios refratores não existem nos *telescópios refletores*. O telescópio refletor nada mais é do que um espelho parabólico no fundo de um tubo, como ilustra a Figura 1. Os raios provenientes de um corpo celeste distante (estrela, galáxia, planeta, etc.) formam um feixe praticamente paralelo, que se reflete no espelho e vai formar a imagem do objeto no foco F.

O problema agora é que, para observar essa imagem, o observador teria de estar com seu olho posicionado no foco da parábola, mas isso é impossível na prática.

Isaac Newton (1642-1727) resolveu esse problema em seu telescópio refletor, colocando um espelho plano E entre o espelho parabólico e o foco F (Figura 1). Com isso, os raios que iriam formar a imagem em F são novamente refletidos e vão formar essa imagem num ponto fora do tubo do telescópio, onde se posiciona o observador.

Figura 1

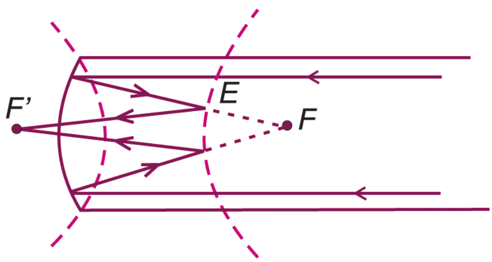


Figura 2

Em 1672 o astrônomo francês *Cassegrain* propôs a utilização de um espelho hiperbólico E, como ilustra a Figura 2, em lugar do espelho plano de Newton. Um dos focos da hipérbole coincide com o foco F da parábola.

Agora os raios que iriam formar a imagem no foco F são refletidos pelo espelho E e formarão essa imagem no outro foco da hipérbole.

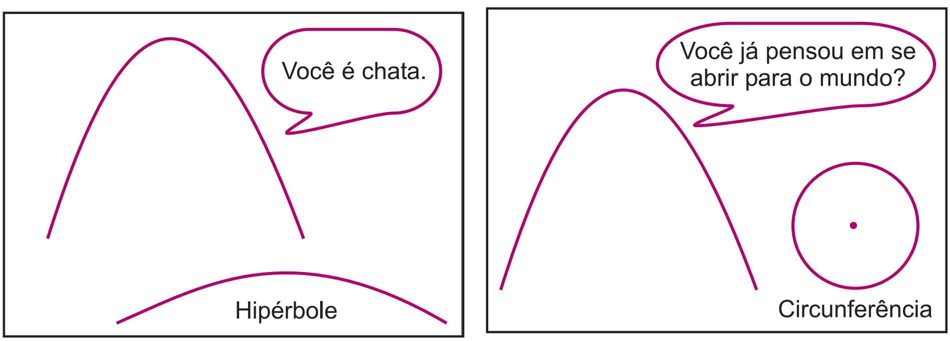
Para compreender a vantagem desse espelho hiperbólico de Cassegrain sobre o espelho plano de Newton, devemos observar que o espelho plano não pode ficar muito próximo do foco *F*, sob pena de o ponto da Figura 1 ficar dentro do telescópio; em conseqüência, o espelho plano precisa ser de razoável tamanho, o que resulta num bloqueio significativo da luz incidente no espelho parabólico que forma a parte principal do telescópio.

O espelho de Cassegrain, pelo contrário, pode ser construído mais próximo ou mais afastado do foco *F,* mantendo-se fixa a distância *FF'* entre os focos da hipérbole; em conseqüência, o tamanho desse espelho pode ser maior ou menor. A distância entre os focos *F* e *F'* também pode ser alterada para mais ou para menos, sem mudar a posição do foco *F.* A combinação desses fatores permite grande flexibilidade na montagem do refletor hiperbólico *E*, adequando-a, assim, às exigências das observações.

Essas montagens de Cassegrain somente começaram a ser utilizadas nos telescópios cerca de um século após terem sido propostas. Desde então passaram a ser largamente usadas, e hoje em dia estão presentes não apenas nos telescópios óticos, mas também nos radiotelescópios.

O famoso telescópio ótico do observatório de Monte Palomar, que fica 80 km a nordeste de San Diego, na Califórnia, utiliza várias montagens do tipo de Cassegrain.

As PARÁBOLAS falam...



A mágica do cubo

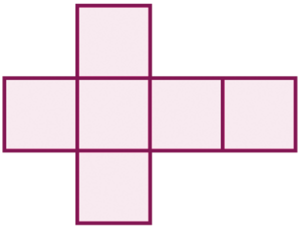
Adaptado do artigo de
Gildo A. Montenegro

Introdução

A visualização espacial permite reconstruir mentalmente o mundo físico e antecipar a solução de problemas, antes que eles surjam no ambiente real. Nessa linha, a intuição geométrica deve ser estimulada na escola, com a construção de modelos de poliedros e objetos da vida cotidiana (maquetes).

Uma forma geométrica conhecida desde a antiguidade, e amplamente usada pelo homem, é o cubo. Há poucos anos surgiu o "cubo mágico", engenhoso quebra-cabeça que utiliza as combinações de figuras nas faces de cubos interligados. Entretanto, podem-se fazer, em sala de aula, outras "mágicas" com cubos.

Uma aposta cúbica



Ele – Todos os livros dizem a mesma coisa: com seis quadrados pode-se armar um cubo.

Ela – É verdade. Abra uma caixa cúbica e você verá que ela é formada por seis quadrados, como na figura.

Ele –Isso é o que todos dizem. Mas eu quero mostrar como fazer um cubo com quatro quadrados.

Ela –Com quatro faces você forma uma caixa cúbica, mas ficam faltando duas tampas.

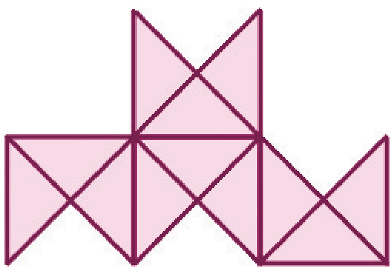
Ele –E se eu fizer um?

Ela –Não existe cubo com quatro faces. Se você quer economizar, experimente viver com menos dinheiro.

Ele –Por falar em dinheiro, você aposta um almoço como eu farei um cubo com menos de quatro quadrados?

Ela –Está fechada a aposta!

Nessa altura, ele apresenta um recorte em cartolina:



Ele –Aqui havia quatro quadrados e eu recortei quatro triângulos que formavam um quadrado; restam três quadrados. Agora, dobre nas linhas convenientes para formar um sólido.

Ela –Não pode ser... bom... de fato, é um cubo. Só que ele é menor do que aquele que eu mostrei.

Ele –A aposta não envolvia medidas. Mas, eu faço um acordo: você paga o almoço e eu, a sobremesa... desde que servida em cubas.

Semelhança, pizzas e chopes

Adaptado do artigo de
Eduardo Wagner

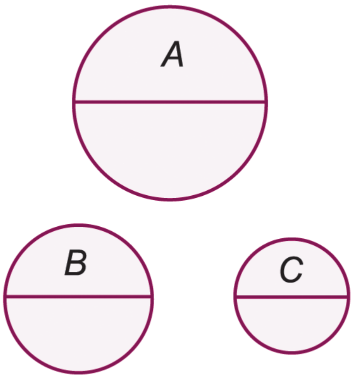
As histórias que vamos contar envolvem dois amigos que gostam de freqüentar bares e restaurantes, além de discutir problemas de Matemática. Em pelo menos duas situações, surgiram interessantes problemas cujas soluções, além de elegantes, são bastante educativas.

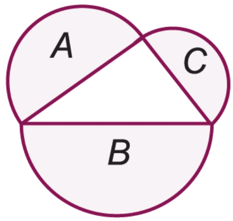
Primeira história

Augusto e João foram a um restaurante para comer pizza. O primeiro pediu uma grande, e o segundo, uma média e uma pequena, todas do mesmo sabor. Curiosamente, o preço da pizza grande era exatamente igual à soma dos preços das pizzas média e pequena. Logo após os pedidos, surgiu naturalmente o problema de saber quem vai comer mais.

O fato de os preços a pagar serem iguais não quer dizer nada, porque nos restaurantes, o preço não costuma ser proporcional à quantidade da comida servida. Augusto argumenta que, se tivesse uma régua, poderia medir os diâmetros, calcular as áreas e verificar se a área da pizza grande é maior, igual ou menor do que a soma das áreas das outras duas. Porém, não havia régua disponível.

Pensando um pouco, João, bom geômetra, declarou ter resolvido o problema, dizendo que assim que as pizzas chegassem, diria quem comeria mais e, para isso usaria apenas objetos que estavam em cima da mesa. Augusto estupefato duvidou. “Como é possível? Não temos instrumento de medida algum. Em cima da mesa só há talheres, copos, guardanapos e o cardápio, responsável por nossa incrível discussão!” A espera não foi longa, e as pizzas chegaram. Rapidamente, então, João cortou cada uma delas em duas metades.





Sobre a mesa (de mármore) juntou os diâmetros para formar um triângulo. Utilizando o canto do cardápio como um modelo para o ângulo reto, João verificou que o ângulo oposto ao diâmetro da maior metade (α) era menor do que 90º, e declarou “eu como mais”. E Augusto, após pensar alguns momentos, concordou.

Qual é a explicação?

A explicação depende de dois teoremas importantes. O primeiro bastante conhecido e o segundo, não muito.

Teorema 1

A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

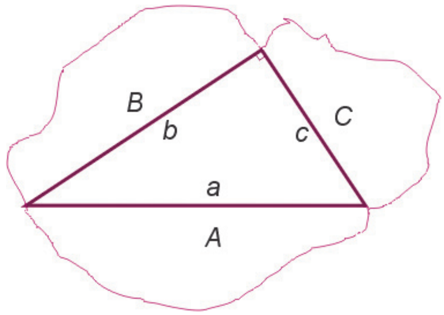
Teorema 2

Se figuras semelhantes são construídas sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo, então a área da figura maior é igual à soma das áreas das outras duas.

Vamos demonstrar esse segundo teorema.

Na figura a seguir, A, B e C representam as áreas de figuras semelhantes que foram construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c.

Pelo teorema 1:



$$\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2},$$

$$\frac{B}{C}=\left(\frac{b}{c}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}.$$

Portanto, $\dfrac{A}{a^2}=\dfrac{B}{b^2}=\dfrac{C}{c^2}=\dfrac{B+C}{b^2+c^2}.$

Como no triângulo retângulo, $a^2=b^2+c^2$, concluímos que $A=B+C$.

Reciprocamente, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados a, b e c de um triângulo, e se $A = B = C$, então $a^2 = b^2 + c^2$ e, pela recíproca do teorema de Pitágoras, o triângulo é retângulo.

Para concluir que, no nosso problema, João estava certo, observe que, se α é o ângulo oposto ao lado a do triângulo de lados a, b e c, temos:

$$\alpha < 90^\circ \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow A < B + C \text{ e}$$

$$\alpha > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2 \Leftrightarrow A > B + C.$$

Portanto, se na nossa história João constatou que o ângulo α era menor que 90º, então a área da semipizza grande era menor que a soma das áreas das outras duas metades.

Segunda história

Dias depois, Augusto, afobado com o calor, senta-se em um bar e pede um chope (na verdade, o primeiro de muitos). Nesse lugar, o chope é servido em "tulipas", que são copos com a forma de um cone. O garçom chega com a bebida, ao mesmo tempo que João encontra seu amigo. "Como vai, João? Sente-se e tome rápido a metade deste copo. Eu tomo a outra metade". A fisionomia de João mostra alguma tristeza. Como determinar a altura do nível da bebida quando um copo cônico contém a metade do seu conteúdo?

Augusto então alivia a situação. "Meu caro amigo, para este problema, seus artifícios são insuficientes. Eu hoje vim prevenido e trouxe uma régua e uma calculadora. Desculpe-me pela brincadeira, e vamos juntos resolver o nosso problema".

Augusto então saca de sua régua, calculadora, caneta e sobre um guardanapo mostra a solução, sob o olhar de um estupefato garçom.

"Observe, João, que o copo tem 20 cm de altura. Desejamos obter a altura da superfícies do líquido que corresponde à metade do volume do copo. Para isso, precisamos recordar dois teoremas".

Teorema 3

Toda seção paralela à base de um cone forma um outro cone semelhante ao primeiro.

Teorema 4

A razão entre o volume de sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Augusto continua sua explicação. Se você tiver tomado uma parte do conteúdo deste copo, teremos aqui, pelo teorema 3, dois objetos semelhantes: o cone formado pelo líquido e o próprio copo. A razão de semelhança entre esses dois copos é a razão entre suas alturas, ou seja, $h/20$. Como desejamos que o líquido tenha a metade do volume do copo, pelo teorema 4 podemos escrever:

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{h}{20}\right)^3 \text{ isto é, } \frac{h}{20}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Assim, a altura que corresponde à metade do volume do copo é $h=10\sqrt[3]{4}$ cm".

João concorda com a perfeita explicação, mas repara que a resposta não resolve ainda o problema, porque ele não tem a menor idéia de quanto é $10\sqrt[3]{4}$. E então Augusto, com a sua calculadora e seu sorriso irônico, diz: "Ah! é bom saber que esse valor dá aproximadamente 16 cm".

Bem. O problema foi resolvido, e o chope, já meio quente, foi adequadamente dividido. Falta apenas o final da história.

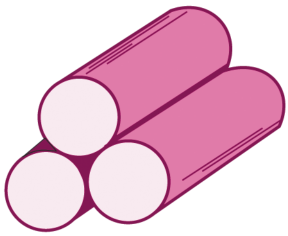
Nessa altura, as pessoas das outras mesas ouviam atentamente nossos personagens com um misto de admiração e espanto. Nisso, João faz uma descoberta, que anuncia em alto e bom som: " Este problema revela que quando somos servidos em tulipas com 4 cm de colarinho estamos tomando apenas metade do conteúdo do copo. Assim, se eu digo que tomei 10 chopes, na verdade tomei 5, mas paguei 10!!"

E foram expulsos do bar.

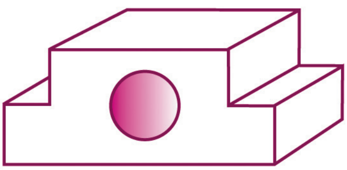
A precisão do furo cilíndrico

Adaptado do artigo de
Luiz Márcio Imenes

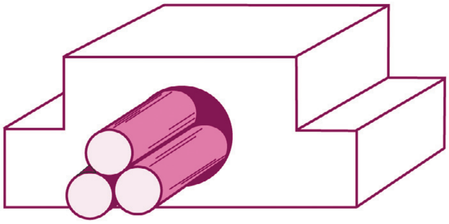
*U*m ex-aluno meu, que hoje é professor universitário, enquanto fazia o curso de Matemática, foi professor em cursos técnicos. Certa vez, descreveu-me um processo, usado pelos técnicos de uma indústria, para verificar a precisão de um furo cilíndrico praticado numa peça.



Os técnicos tomam três bastões cilíndricos de mesmo raio *r*, que são fixados uns aos outros (com solda, por exemplo), formando um conjunto solidário. O problema é calcular o raio *r*, de modo que, ao introduzir o conjunto no furo cilíndrico, os bastões se ajustem sem folga.



Girando o conjunto, percebemos se o furo praticado na peça é, de fato cilíndrico. Ele deve girar "sem pegar" e sem folga.

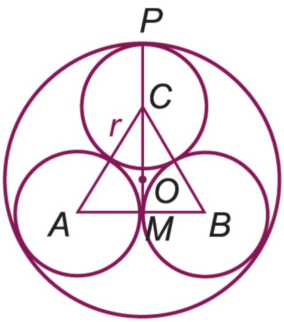


Pois bem, a execução desse processo exige a solução de um problema de Geometria. Na figura seguinte, os três círculos menores têm o mesmo raio r, são tangentes entre si dois a dois, e cada um deles é tangente ao círculo maior de raio R.

Devemos calcular r em função de R.

Vamos resolver o problema:

O triângulo ABC é equilátero, e seu lado é igual a $2r$. O ponto O é seu baricentro, logo



$$OC = (2/3)CM$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AMC, temos:

$$CM^2 = (2r)^2 - r^2 = 3r^2 \quad \text{ou} \quad CM = r\sqrt{3} \quad \text{ou}$$

$$OC = (2/3)r\sqrt{3}.$$

Como $OC = OP - PC = R - r$, temos que

$$R - r = (2/3)r\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad r = (2\sqrt{3} - 3)R.$$

Esse valor deve ser calculado considerando-se a precisão dos instrumentos de medida usados na indústria. Se, por exemplo, trabalhamos com décimos de milímetro e $R = 10{,}00$ cm, deveremos ter

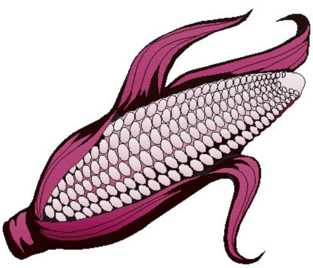
$$r = 0{,}464 \times R = 4{,}64\ cm.$$

A capacidade do graneleiro

Adaptado do artigo de
Antonio Acra Freiría
Geraldo Garcia Duarte Júnior

Histórico

Fomos procurados por diretores da Cooperativa de Laticínios e Agrícola de Batatais Ltda., que nos contaram o seguinte "caso" – o milho produzido pelos cooperados é guardado (a granel) num armazém denominado graneleiro. Construído há 30 anos, embora de sólida e perfeita construção, o mesmo carecia de especificações precisas sobre sua forma e capacidade.



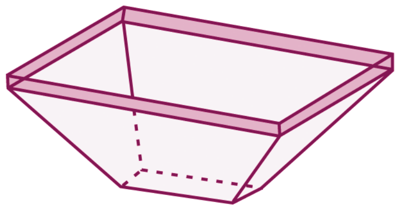
O volume do milho armazenado depende de vários fatores, tais como: temperatura ambiente, umidade e as impurezas que rotineiramente são colhidas com os grãos de milho. Por isso os agrônomos responsáveis pela cooperativa descontam do cooperado, "a priori", um percentual variável de 4% a 5% do milho depositado. Na entressafra, quando o milho é vendido e retirado do graneleiro, a "sobra" é rateada entre os cooperados. Até então, todos estavam satisfeitos com o critério adotado.

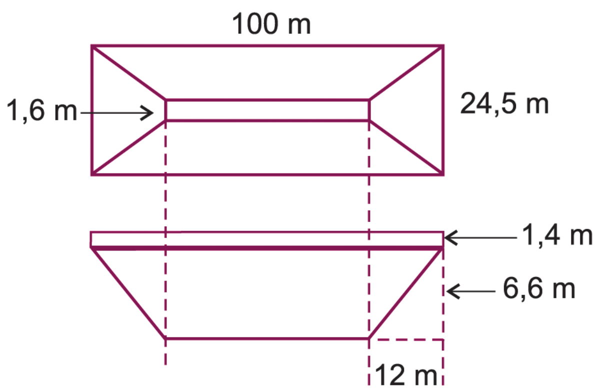
Contudo, na entressafra do ano da consulta, a repetição do processo resultou numa "falta" de aproximadamente 5% do milho depositado. O fato, evidentemente, desagradou a todos e despertou nos diretores a necessidade de estabelecer, com precisão, a forma e a capacidade do graneleiro.

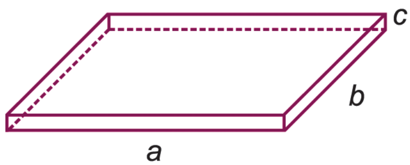
Visitamos então a cooperativa, fazendo o levantamento dos dados e, depois, apresentamos uma solução à moda de Arquimedes, que consiste essencialmente em exaurir o sólido por meio de volumes conhecidos.

Os cálculos

O graneleiro tem forma poliédrica, com as dimensões indicadas no desenho. Com um corte horizontal, destacamos do sólido um paralelepípedo retângulo:







$a = 100$
$b = 24{,}5$
$c = 1{,}4$
$V_1 = a \times b \times c$

Da parte restante, com dois cortes transversais, destacamos um prisma de base trapezoidal:

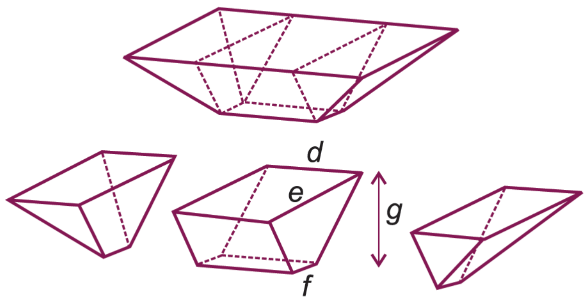
$$d = 100 - 2 \times 12 = 76$$

$$e = 24{,}5$$

$$f = 1{,}6$$

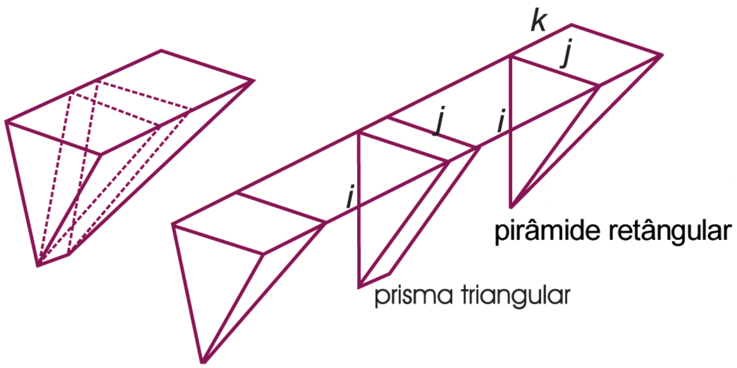
$$g = 6{,}6$$

$$V_2 = \frac{f + e}{2} \times g \times d$$



prisma trapezoidal

As pontas que restam são simétricas. Cada uma delas pode ser decomposta em um prisma de base triangular e duas pirâmides (simétricas) de base retangular:

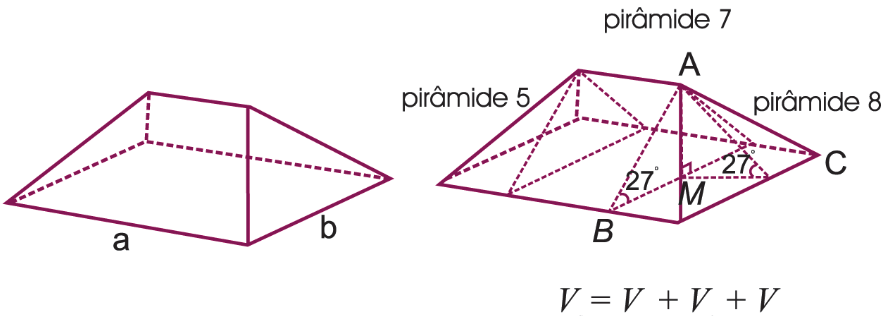


$$h = 1{,}6$$
$$i = g = 6{,}6$$
$$j = 12$$
$$k = \frac{24{,}5 - 1{,}6}{2} = 11{,}45$$
$$V_3 = \frac{i \times j}{2} \times h$$
$$V_4 = \frac{j \times k \times i}{3}$$

Assim, o volume do graneleiro é dado por:

$$V_G = V_1 + V_2 + 2\,(V_3 + 2\,V_4).$$

Efetuados os cálculos, obtém-se: $V_G = 11\,311{,}72\ m^3$. Esse é o volume de milho que o depósito comporta quando raso. É possível armazenar mais milho ainda, acima da "boca", formando-se um monte de forma também poliédrica:



$$V_s = V_5 + V_6 + V_7$$

O ângulo de inclinação das faces laterais (em relação ao retângulo de lados *a* e *b*), chamado ângulo de acentamento do milho, é fornecido pelos manuais: 27°. Com este dado e novos cortes, pode-se calcular o volume do poliedro V_s como a seguir.

No ΔABM: $AM = \frac{b}{2} \times \text{tg}\, 27°$.

Como $\Delta ABM = \Delta ACM$, resulta $CM = BM = b/2$.

Então:

$$V_5 = V_6 = \frac{1}{3} \times b \times CM \times AM$$

$$V_7 = \frac{b \times AM}{2} \times (a - 2 \times CM)$$

Efetuados os cálculos, obtém-se o volume suplementar de milho:

$$V_S = 7028{,}18\ m^3\ ;$$

logo o volume total é $V_G + V_S = 11311{,}72 + 7028{,}18 = 18\,339{,}90$.

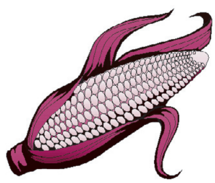
O peso específico do milho (fornecido pelos manuais teóricos) é 0,750 t/m^3.

Logo, a capacidade total do graneleiro é:

$$C_r = 18\,339{,}90 \times 0{,}750 \approx 13755\text{t}$$

Conclusão

Esses cálculos elementares permitiram determinar a capacidade do graneleiro, e assim foi possível comprovar o desaparecimento de aproximadamente 12 000 sacas de milho da Cooperativa na entressafra. Contudo, até o momento da redação destas notas, não se tinha notícia nem das sacas e nem de como elas desapareceram do graneleiro!



Fulerenos e futebol: aplicações da fórmula de Euler

Adaptado do artigo de
Luis Fernando Mello

*E*m 1982, a seleção brasileira de futebol encantava os amantes da arte futebolística, na Copa do Mundo realizada na Espanha. Não era para menos, uma vez que o time contava com talentos do calibre de Júnior, Cerezo, Falcão, Sócrates e Zico.

Pouco tempo depois, em 1985, três químicos, *Harold W. Kroto, Robert F. Curi* e *Richard E. Smalley*, surpreenderam a comunidade científica com o anúncio da descoberta dos *fulerenos* (*Nature*, volume 318, p. 162), uma forma alotrópica de carbono e a primeira molecular, à qual deram o nome de *buckminsterfulereno* ou simplesmente C_{60}. (NR)

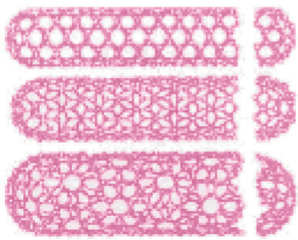
Em 1996, Kroto, Curi e Smalley foram laureados com o Prêmio Nobel de Química. Dois anos antes éramos tetracampeões mundiais de futebol na Copa dos Estados Unidos, com um time esforçado, que não encantava e tinha apenas um grande destaque: o baixinho Romário.

Do ponto de vista químico, o C_{60} nada mais é do que uma molécula formada por 60 átomos de carbono, com cada um desses átomos ligado a três outros.

Do ponto de vista matemático, a estrutura das ligações desses 60 átomos de carbono forma um poliedro convexo, cujos 60 vértices são exatamente os átomos de carbono, e as arestas, suas ligações químicas.

As faces desse poliedro são hexágonos e pentágonos. Depois do C_{60}, outros fulerenos foram descobertos, tais como C_{70}, C_{76}, C_{240}, C_{540},..., em que os subíndices correspondem ao número de átomos de carbono.

Estudando a síntese de quantidades macroscópicas de fulerenos, *Sumio Iijima,* em 1991, descobriu outros tipos de moléculas de carbono e as denominou *nanotubos:* tubos cilíndricos de diâmetros da ordem de 8 *nm* a 15 *nm* (1 *nm é* igual a 10^{-9} *m),* empacotados um dentro do outro, como diversas camadas de uma cebola, e com as extremidades fechadas por hemisférios fulerênicos.



Exemplos de nanotubos

(figura da internet: omnis.if.ufrj.br/~capaz/ffnc/home.html)

Mas nem tudo eram flores naquela época. Em 1990, nossa seleção nacional fracassava nas fases iniciais da Copa do Mundo da Itália.

Recentemente foi descoberto que os nanotubos são flexíveis e mais resistentes que qualquer aço, e têm propriedades elétricas especiais, sendo, por exemplo, melhores condutores elétricos que o cobre. Várias aplicações envolvendo os nanotubos já estão sendo implementadas (veja *Scientific American Brasil,* número 1, p. 41).

A fórmula de Euler

Do ponto de vista matemático, a estrutura das ligações dos átomos de carbono dos fulerenos (nanotubos) forma um poliedro convexo, cujos vértices são tais átomos.

Podemos então utilizar a conhecida fórmula de Euler para poliedros convexos,

$$V - A + F = 2, \qquad (1)$$

para saber um pouco mais a respeito dessas estruturas, lembrando que V é o número de vértices, A é o número de arestas, e F é o número de faces do poliedro.

Uma belíssima aplicação da fórmula (1), no contexto da Teoria dos Grafos, está na sua utilização na demonstração do Teorema das Cinco Cores: Todo mapa pode ser colorido com no máximo cinco cores (veja J. L. Gersting, *Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação,* 4ª edição, LTC Editora, p. 253).

Uma conseqüência interessante da fórmula de Euler

Se um poliedro convexo possui apenas faces hexagonais e pentagonais e, em cada vértice, incidem exatamente 3 *arestas, então ele possui exatamente* 12 *faces pentagonais.*

Para mostrar esse resultado, observamos primeiro que: cada face hexagonal do poliedro possui 6 arestas em sua fronteira, cada face pentagonal possui 5 arestas em sua fronteira, e cada aresta é parte da fronteira de duas faces. Assim, se indicarmos por F_H e F_P o número de faces hexagonais e poligonais, respectivamente, teremos

$$6F_H + 5F_P = 2A. \qquad (2)$$

Por outro lado, como cada aresta liga dois vértices e (por hipótese) de cada vértice partem três arestas, temos:

$$2A = 3V. \qquad (3)$$

Da fórmula de Euler (1) segue então que $V - A + F_H + F_P = 2$. Multiplicando por 6 e usando (2) e (3), obtemos:

$$F_P = 12.$$

Nas moléculas de fulerenos e nanotubos, cada átomo liga-se exatamente a 3 átomos de carbono e podemos, portanto, concluir do resultado que elas têm que possuir exatamente 12 faces pentagonais.

E o futebol?

C_{60} com seus 60 vértices, 32 faces e 90 arestas

A essa altura do campeonato você pode estar indagando o que toda essa história de poliedro convexo, fulereno e nanotubo tem a ver com futebol. Uma rápida olhada nos jogos transmitidos pela televisão, ou mesmo no seu armário, será suficiente para se convencer de que, de fato, essas coisas estão relacionadas. Você já reparou que alguns modelos de bolas de futebol são fabricados com gomos hexagonais e pentagonais? Dê uma olhada! Agora, um tal modelo de bola de futebol nada mais é do que um poliedro convexo com faces hexagonais e pentagonais inflado.

Como os gomos são polígonos regulares, é possível demonstrar que de cada vértice partem exatamente três arestas e concluir, pela conseqüência da fórmula de Euler demonstrada no item anterior, que devem existir 12 gomos pentagonais. A palavra *pentagonal* lembra *pentacampeonato.* E foi com um modelo de bola de futebol com gomos hexagonais e pentagonais que Ronaldo, Rivaldo e Ronaldinho Gaúcho fizeram o que fizeram na conquista do pentacampeonato mundial de futebol na Copa da Coreia e do Japão, em 2002.

Nota

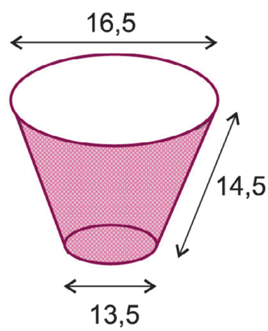
O nome é uma homenagem a *Richard Buckminster Fuller* (1895-1983), engenheiro, arquiteto, escritor e educador americano, famoso pela originalidade de suas idéias. Entre suas criações arquitetônicas, destaca-se a cúpula geodésica, uma estrutura formada por polígonos regulares, que se apoia diretamente no solo sem necessidade de bases ou pilares e pode ser construída em proporções ilimitadas. Essa estrutura possui ainda grande estabilidade, o que levou Fuller a prever sua ocorrência na natureza, conforme mais tarde constatado em microorganismos e nas moléculas das quais trata este artigo.

Como cortar o pano para revestir o cesto?

Adaptado do artigo de
Luiz Márcio Imenes

Conheci a Gladys, que também é professora, num curso promovido pela PUC de Porto Alegre. Por duas razões, lembro-me bem de um dia em que fui à sua casa. A companhia de sua família e o almoço estavam uma delícia. Além disso, ela me propôs um interessante problema.

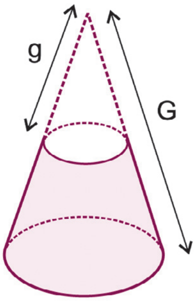
Sua amiga Irene estava vendendo alguns objetos que ela mesma decorava. Eram peças para o enxoval de bebês. Ela forrava e enfeitava latas de talco, vidros para cotonetes, berços, etc. O problema surgiu quando quis revestir um cesto com a forma e as dimensões (em centímetros) indicados na figura.

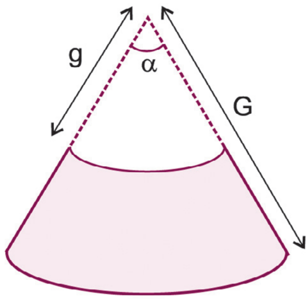


Como fazer o molde para cortar o pano, de modo a revestir sua superfície lateral?

Vamos resolver o problema.

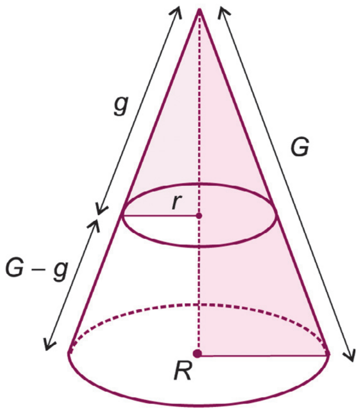
O cesto tem a forma de um tronco de cone de bases paralelas.





A planificação da superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular, cujo raio é a geratriz do cone, e a planificação da superfície lateral do tronco de cone é um setor (pedaço) de coroa circular.

Este setor dará a forma do molde. Para desenhá-lo, precisamos conhecer os raios G e g além do ângulo central α.



Os triângulos indicados na figura são semelhantes, portanto

$$\frac{G}{R} = \frac{g}{r} \Rightarrow G = \frac{R}{r}g.$$

Como $2R = 16{,}5$ e $2r = 13{,}5$ resulta $G = \frac{11}{9}g$.

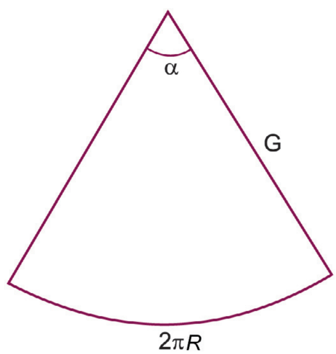
Mas $G - g = 14{,}5$, donde

$$\frac{11}{9}g - g = 14{,}5 \Rightarrow g = 65{,}2\,\text{cm} \Rightarrow G = 79{,}7\text{cm}.$$

Para obter o ângulo central α, devemos notar que o arco de raio G, subtendido por ele, tem comprimento igual ao da circunferência de raio R.

Logo,

$$\alpha = \frac{2\pi R}{G}\,rad = \frac{\pi \times 16{,}5}{79{,}7}\,rad \cong 37^\circ 30'.$$



Uma construção geométrica e a PG

Adaptado do artigo de
Elon Lages Lima

Dados os números reais *a, r,* com $0 < r < 1$, seja

$$S = a + ar + ar^2 + + ... + ar^n + ...$$

a soma dos termos da progressão geométrica ilimitada, cujo primeiro termo é a, e cuja razão é r.

Temos:

$$S = a + r(a + ar + ar^2 + ...) = a + rS,$$

donde $S - rS = a$ e daí $S = \dfrac{a}{1-r}$.

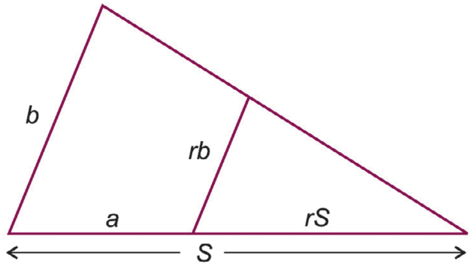
Não há geometria alguma nesse raciocínio, embora a progressão se chame *geométrica.*

Mas, dados $a > 0$ e $0 < r < 1$, podemos construir geometricamente a soma

$S = a + ar + ar^2 + ...,$ do seguinte modo:

Tomamos um segmento de comprimento a e, a partir de uma de suas extremidades, outro segmento, com um comprimento b, arbitrário. Na outra extremidade, traçamos um segmento paralelo a b, de comprimento rb.

A reta que liga as extremidades livres dos segmentos *b* e *rb* encontra o prolongamento de *a* num ponto que dista exatamente *S* da primeira extremidade de *a.*



A figura ao lado diz mais do que as palavras.

Explicação

Os triângulos de bases *b* e *rb* na figura são semelhantes. A razão de semelhança é *r.* Logo, o segmento adjacente a *a* mede *rS,* ou seja,

$$S = a + rS, \quad \text{donde} \quad S = a/(1 - r) = a + ar + ar^2 + \dots$$

Uma construção análoga fornece um segmento de comprimento

$$S' = a - ar + ar^2\ ar^3 + \dots + (-1)^n ar^n + \dots$$

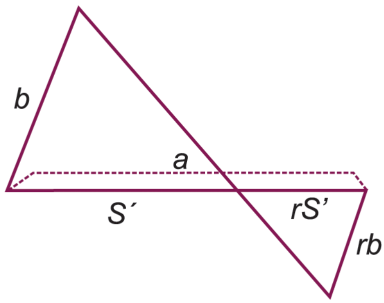
Neste caso, temos

$$S' = a - r(a - ar + ar^2 - ar^3 + \dots),$$

ou seja,

$$S' = a - rS' \quad \text{e daí} \quad S' = a/(1 + r).$$

A construção de S' é dada na figura ao lado.



Os segmentos *b* e *rb* são paralelos, traçados a partir das extremidades do segmento *a,* porém em sentidos opostos. Os dois triângulos da figura são semelhantes, e a razão de semelhança é *r.*

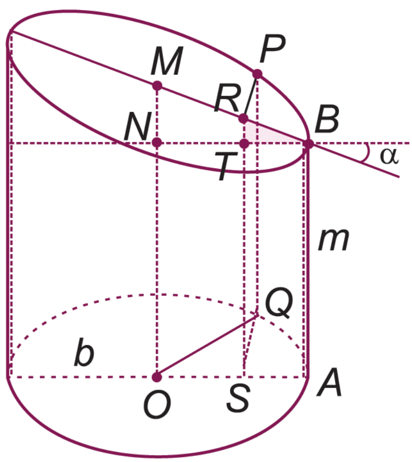
Logo, se chamarmos S' a base do triângulo maior, a base do menor será rS'. Portanto, $a = S' + rS'$ e daí

$$S' = a/(1 + r) = a - ar + ar^2 - ar^3 + \dots.$$

Corte e costura

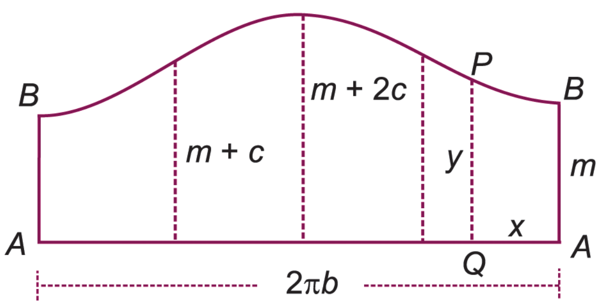
Adaptado do artigo de
Ernesto Rosa Neto

Se a professora ou professor, por motivo particular, deseja mudar de ramo, sem se afastar do visgo da Matemática, aqui vai uma colaboração. Como cortar uma manga (de camisa)?



Uma manga é um tronco de cilindro, dependendo do modelo. A secção é uma elipse, cujo plano possui uma inclinação de um ângulo α em relação à base. Precisamos medir b, que é a circunferência do braço dividida por 2π, e α, que dá a inclinação. O comprimento da parte interna da manga é m. Vamos fazer o corte em função de b, α e m.

Para cada ponto P da figura, vamos calcular a altura $y = PQ$ em função do arco AQ, de medida x. Para isto, calculemos TR em função de x:

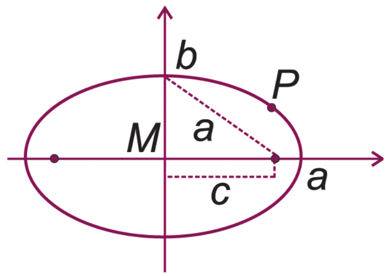


Nos triângulos *BRT* e *MNT* temos:

$$\cos\alpha = \frac{TB}{RB} = \frac{NB}{MB} = \frac{OA}{MB} = \frac{b}{MB} \Rightarrow 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{MB^2}{b^2}.$$

Fazendo $MB = a$, temos $tg^2\alpha = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow tg\alpha = \frac{c}{b}$,

onde c é a semidistância focal da elipse de semi-eixos a e b.



$$TR = TC\,\text{tg}\,\alpha = SA\,\text{tg}\,\alpha = (AO - OS)\text{tg}\,\alpha =$$

$$(b - b\cos x).c/b = c(1 - \cos x), \text{ logo,}$$

$$y = QP = SR = ST + TR = m + c(1 - \cos x) \Rightarrow y = m + c - c\cos x.$$

Portanto, uma elipse se “desenrola” numa cossenóide. Isso pode ser concretizado também em cartolina, que é molde para corte.

Um modelo em madeira, molhado com tinta, deixa a marca característica no papel.

Se o professor pretende mudar, deve tomar medidas!

Elipse, sorrisos e sussuros

Adaptado do artigo de
Renato J. C. Valladares

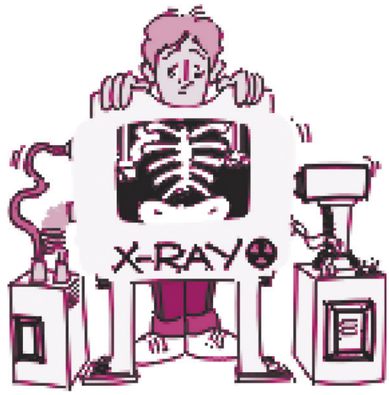
Ao lermos o artigo *Por que as antenas são parabólicas* de Eduardo Wagner sobre as antenas parabólicas, baseado na propriedade bissetora da parábola, não podemos deixar de lembrar que as elipses também têm uma propriedade similar.

Essa propriedade é usada na construção de refletores odontológicos, aparelhos de emissão de certos raios usados em medicina ou nas salas de sussurros existentes “.... em certos museus americanos de ciência e nos castelos de alguns monarcas europeus excêntricos...”.

Por outro lado, para cuidar do sorriso dos pacientes, muitos dentistas usam uma luminária com espelho elíptico que possui a propriedade de concentrar os raios luminosos em um ponto, que é ajustado pelo dentista para iluminar o dente que está sendo tratado. Conseguem-se, assim, duas vantagens:

A primeira é concentrar o máximo de luz onde se está trabalhando, e a segunda é evitar que os raios luminosos ofusquem o paciente, o que aumentaria o desconforto causado pelo tratamento dentário.

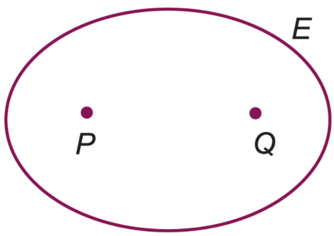
De maneira diferente dos holofotes comuns, como os faróis de carro, que refletem os raios luminosos em uma mesma direção (valendo-se, para isso, de um espelho parabólico), os holofotes dentários se valem de espelhos elípticos para concentrar os raios luminosos emitidos pela lâmpada em um determinado ponto.



Isso ocorre devido à *propriedade refletora da elipse*, que também explica o funcionamento de diversos aparelhos de emissão de raios usados em tratamentos médicos, como, por exemplo, o de radioterapia, cujos raios devem destruir os tecidos doentes, sem afetar os tecidos sadios que se encontram ao redor.

Já as salas de sussurros são construções de forma oval, onde estão marcados dois pontos no chão. Duas pessoas em pé, uma em cada um desses pontos, podem se comunicar em voz sussurrada, inaudível no restante da sala. Isso também decorre da propriedade refletora da elipse.

A forma da sala é de fundamental importância. Ao projetá-la, fixam-se dois pontos P e Q, que ficam na altura da cabeça das pessoas que vão se comunicar. A seguir, toma-se uma elipse E que admita P e Q como focos, e a sala é construída de tal maneira que *qualquer plano que passe por esses pontos intercepte a sala, segundo uma elipse congruente com a escolhida.* Na figura ao lado mostramos uma seção da sala dos sussurros, por um plano que passe por P e Q.



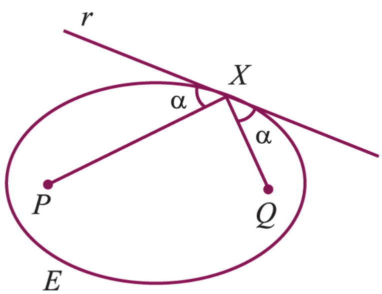
Isso possibilita desenvolver todo o nosso estudo na elipse E que, por ser uma figura plana, pode ser considerada em um plano previamente fixado.

Pela própria definição de elipse, a soma das distâncias de um ponto da curva aos focos é constante. Assim, todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos *que, ao se refletirem nas paredes da sala, cheguem ao segundo foco*, terão percorrido a mesma distância e, por isso, chegarão ao mesmo tempo. Já *a propriedade bissetora* garante que *todo som* *emitido em um dos focos se dirigirá após a reflexão exatamente para o outro foco.*

Assim, conjugando essas duas propriedades, concluímos que *todas as ondas sonoras emitidas em um dos focos chegarão ao mesmo tempo no outro foco,* o que, sem dúvida, proporciona uma amplificação natural do som, explicando o funcionamento das salas de sussurros. Passemos então a estudar a propriedade bissetora da elipse.

Propriedade bissetora da elipse

Seja uma elipse E com focos P e Q e seja um ponto $X \in E$. Nesse caso a reta r, tangente a E em X, forma ângulos iguais com os raios focais PX e QX.



A demonstração dessa propriedade pode ser encontrada, por exemplo, no número 36 da Revista do Professor de Matemática, e se baseia em duas leis físicas sobre a reflexão:

1. O ângulo de incidência e o ângulo de reflexão em um plano são iguais.
2. A reflexão em cada ponto de uma superfície comporta-se como se fosse no plano tangente à superfície, no respectivo ponto.

Capítulo 4

Contagem, Probabilidade e Estatística

O problema dos discos

Adaptado do artigo de
Roberto Ribeiro Paterlini

*T*emos aplicado o problema do jogo dos discos em classes de estudantes de Licenciatura em Matemática e temos acompanhado colegas professores que o tem aplicado no ensino médio e fundamental. O problema tem feito muito sucesso.

O problema do jogo dos discos

Uma escola estava preparando uma Feira de Ciências e foi pedido aos estudantes que bolassem um jogo que servisse para arrecadar fundos. Os estudantes observaram que no salão da Feira o piso era feito com quadrados de 30 cm de lado, desses quadrados de Paviflex. Pensaram então em construir discos de papelão de um certo diâmetro d que seriam comprados pelos visitantes por R$ 1,00 cada um. O visitante jogaria o disco aleatoriamente no piso. Se o disco, depois de pousar no piso, tocasse um lado de um quadrado, ele perderia para a escola o que tinha pago. Se, ao contrário, acertasse o disco inteiramente dentro de um quadrado, ele receberia R$ 2,00 (R$ 1,00 como devolução e mais R$ 1,00 como prêmio).

Posição favorável ao jogador | à escola

O problema dos estudantes consistia em determinar o diâmetro d dos discos de modo que o jogo resultasse favorável à escola. Observaram que quanto menor d, melhor para o jogador, e quanto maior d, melhor para a escola. O favorecimento para a escola não deveria ser exagerado, pois, se o jogo fosse muito desfavorável para o jogador, ninguém iria querer jogar. Resolveram que uma probabilidade de 60% favorável à escola seria adequada.

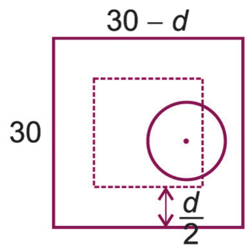
Pergunta 1

Como determinar o valor de d que resulta em uma probabilidade de 40% favorável ao jogador e de 60% à escola?

Pergunta 2

Qual será, em média, o ganho da escola se 500 discos forem vendidos na feira?

Resposta da Pergunta 1



Sob condições ideais podemos supor que lançar o disco aleatoriamente no piso é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Assim, a probabilidade p de o jogador ganhar (no nosso caso 40%) é a mesma probabilidade de um ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado 30, cair dentro do quadrado de lado $30-d$.

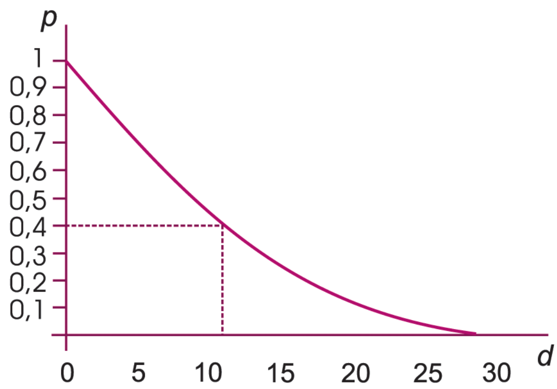
Da definição de probabilidade geométrica temos

$$p=\frac{\text{área do quadrado menor}}{\text{área do quadrado maior}} \quad \text{ou} \quad p=\frac{(l-d)^2}{l^2}=\frac{1}{l^2}d^2-\frac{2}{l}d+1.$$

Como queremos $p = 40\% = 0{,}4$, obtemos $d=30-6\sqrt{10}\approx 11{,}0263$.

No caso geral de um quadrado de lado l e probabilidade p do jogador ganhar, uma solução análoga fornece $p=\frac{(l-d)^2}{l^2}=\frac{1}{l^2}d^2-\frac{2}{l}d+1.$ e portanto, $d=l(1-\sqrt{p})$.

Apresentamos o gráfico de $P(d) = \frac{1}{30^2}d^2 - \frac{1}{15}d + 1,$ com $0 \leq d \leq 30.$ Observe que $d = 30$ é um zero duplo de $P(d).$



As duas linhas pontilhadas na figura acima mostram como se obtém graficamente o valor de d tal que $P(d) = 0{,}4 = 40\%.$

Resposta da Pergunta 2

Se 500 discos forem vendidos na feira, a arrecadação bruta será R$ 500,00. Supondo que em 40% das jogadas (200 jogadas) os jogadores ganhem, a escola pagará R$ 400,00. Sobrará R$ 100,00 para a escola.

Comentários sobre o uso do jogo dos discos em sala de aula

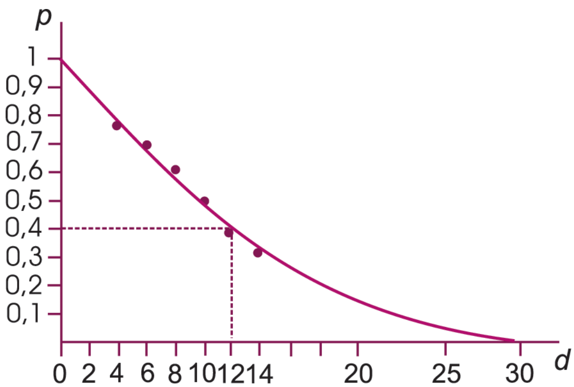
Participando de um projeto dos Departamentos de Matemática e Física da UFSCar tivemos a oportunidade de orientar um grupo de professores que aplicaram o problema do jogo dos discos em suas escolas.

Para resolver o problema por experimentação foram construídos discos de madeirit ou de borracha com diâmetros 4, 6, 8, 10, 12 e 14 cm.

Os professores observaram que devem ser feitos pelo menos 200 lançamentos para cada diâmetro e para facilitar a experiência foram feitos 10 discos de cada diâmetro.

d	p
4	75,5%
6	68,5%
8	62%
10	50%
12	38%
14	32%

Os resultados obtidos em uma classe estão dispostos na tabela acima, sendo d o diâmetro dos discos, em cm, e p a probabilidade de o jogador ganhar.



No gráfico estão dispostos os pontos obtidos. Os estudantes, usando uma folha de papel quadriculado e uma régua, desenharam a curva que lhes pareceu ser a que melhor se aproximava dos pontos dados e obtiveram a solução $d \approx 11{,}5$ (ligeiramente diferente do que obtivemos no gráfico). Ao fazer nosso gráfico (acima), usamos o aplicativo computacional *Maple V* para obter a função quadrática que mais se aproxima dos pontos dados. Acrescentamos na lista dos estudantes os pontos $(0, 1)$ e $(30, 0)$. A função obtida foi

$$P(d) = 0{,}0008977221\,246\,d^2 - 0{,}0605182106\,5\,d + 1{,}004555785\,.$$

Resolvendo a equação $P(d) = 0{,}4$ em d, temos $d \approx 12{,}2$.

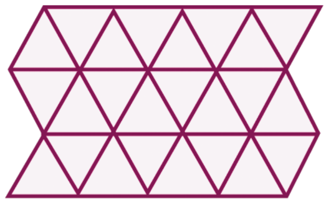
Fazendo conexões

No problema do jogo dos discos podemos considerar pavimentações de outros tipos para o piso onde serão lançados os discos, fazendo conexões com outras áreas da Matemática.

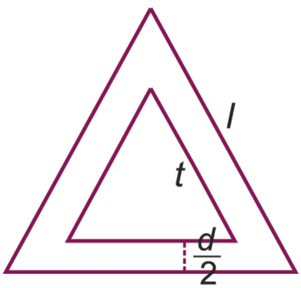
Consideremos as pavimentações chamadas mosaicos regulares do plano, constituídas por polígonos regulares de um único tipo e satisfazendo as condições:

(a) quando dois polígonos se intersectam, essa interseção é um lado ou um vértice comum;

(b) a distribuição dos polígonos ao redor de cada vértice é sempre a mesma. Os únicos mosaicos regulares do plano são os constituídos por triângulos equiláteros, quadrados ou hexágonos regulares (que se reduz aos triângulos).



Vamos aplicar nosso jogo dos discos a esses tipos de pavimentação. O caso de mosaicos formados por quadrados já foi estudado acima.



Suponhamos que o piso do jogo dos discos seja pavimentado com peças na forma de triângulos equiláteros de lado l.

Lembrando que o apótema do triângulo equilátero (raio da circunferência inscrita) vale $a = \frac{\sqrt{3}}{6}l$, os discos podem ter diâmetro d tal que $0 < d < 2a$, ou seja, $0 \leq d \leq \frac{\sqrt{3}}{3}l$.

No interior do triângulo equilátero de lado l dispomos um triângulo equilátero de lado t, com lados paralelos ao triângulo maior, de modo que a distância entre o lado do triângulo maior ao lado paralelo do triângulo menor seja $\frac{d}{2}$.

Podemos verificar que a relação entre l e t é $l = t + \sqrt{3}d$. Lembrando que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual à razão entre os quadrados dos lados, a probabilidade de um disco de diâmetro *d*, lançado aleatoriamente no piso, cair inteiramente dentro do triângulo de lado l é

$$P(d) = \frac{t^2}{l^2} = \frac{(l - \sqrt{3}d)^2}{l^2} = \frac{3}{l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{l}d + 1.$$

Resolvendo a equação $P(d) = p$ em d, temos $d = \frac{\sqrt{3}}{3}l(1 \pm \sqrt{p})$.

Como $0 \le d \le \frac{\sqrt{3}}{3}l$, temos $d = \frac{\sqrt{3}}{3}l(1 - \sqrt{p})$. Essa é a solução do jogo dos discos para o caso de o piso ser pavimentado com triângulos equiláteros.

Nota histórica sobre Buffon e o problema dos ladrilhos

Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon, nasceu em 7 de setembro de 1707, em Montbard, na França, e morreu em 16 de abril de 1788, em Paris.

Nascido na aristocracia, estudou Medicina e Direito. Mostrou interesse pela Matemática, tendo descoberto sozinho a Fórmula do Binômio e mantido correspondência com Cramer sobre Mecânica, Geometria, Probabilidade, Teoria dos Números e Cálculo Diferencial e Integral. Mas era a Natureza a sua paixão. Dedicou-se principalmente à História Natural, tendo sido o maior responsável pelo crescimento do interesse pela História Natural na Europa, no século XVIII.

No século XVIII acreditava-se que Deus havia criado as espécies separadamente, isto é, de modo independente umas das outras, e que a idade da Terra seria de no máximo 6 000 anos. Em sua *História Natural*, uma enciclopédia que continha todo o conhecimento da época sobre a natureza, Buffon apontava, 100 anos antes de Darwin, as semelhanças entre homens e macacos e até mesmo sugeria a existência de um ancestral comum. Em *As Épocas da Natureza* (1788), sugeria que a idade da Terra era muito maior que os 6 000 anos até então a ela atribuídos.

O 4º volume do *Suplemento à História Natural*, publicado em 1777, tem 3 de suas 35 seções dedicadas ao Cálculo de Probabilidades. Uma delas é *Sur le jeu de franc-carreau* (*Sobre o jogo do ladrilho*), na qual Buffon discute o jogo do ladrilho e apresenta o Problema da Agulha . Foi o primeiro escrito sobre o que hoje se conhece por Probabilidade Geométrica.

O jogo do ladrilho

Era bastante jogado pelas crianças francesas no século XVIII. Uma pequena moeda de raio R é lançada ao acaso em um chão coberto por ladrilhos quadrados de lado l ($l > 2r$). As crianças apostavam que a moeda cairia inteiramente dentro de um ladrilho ou que a moeda cairia atravessando o lado de algum ladrilho.

Buffon notou que a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho era a probabilidade de o centro da moeda cair dentro de um quadrado de lado $l - 2r$.

Essa probabilidade é a razão entre as áreas do quadrado e do ladrilho, pois a probabilidade de o centro da moeda cair em uma região é proporcional à área dessa região. Portanto, a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho é $\dfrac{(l-2r)^2}{l^2} = \left(1 - \dfrac{2r}{l}\right)^2$.

Intuição e probabilidade

Adaptado do artigo de
Raul F. W. Agostino

De tudo que ensinamos aos nossos alunos, os assuntos que despertam mais interesse são os que envolvem situações do cotidiano. Nestes tempos de AIDS, o problema a seguir tem servido de boa fonte de motivação e participação, em sala de aula.

Num país, 10% da população é portadora de um vírus. Um teste para detectar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a portadores e dá 80% de acertos quando aplicado a não portadores.

Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus, dentre aquelas que o teste classificou como portadoras?

Vejamos uma solução que pode ser dada sem citar teoremas de Probabilidade ou Estatística.

Considere que o teste foi aplicado aos I habitantes do país. O número de testes que indicou a presença do vírus foi:

$$\underbrace{0,9\times 0,1\times I}_{\substack{\text{90\% dos que realmente}\\ \text{são portadores}}} + \underbrace{0,2\times 0,9\times I}_{\text{20\% dos não portadores}} = 0,09I + 0,18I = 0,27I.$$

Destas, são portadoras $0{,}09I$.

Assim, são realmente portadoras do vírus $0{,}09I/0{,}27I = 1/3 \approx 33{,}3\%$ das pessoas que o teste classificou como portadoras.

Esse número é no mínimo curioso e mostra que uma pessoa que fez o teste e foi classificada como portadora tem grande possibilidade de ser um "falso-positivo" (normalmente, quando uma pessoa faz um teste desse tipo e o resultado é positivo, os médicos recomendam um novo teste).

No entanto, o número de testes que indicaram a ausência do vírus foi $0{,}73I$ e, dentre esses, $0{,}72I$ não são portadores, o que dá

$$0{,}72I/0{,}73I = 98{,}6\% \text{ de não portadores}$$

dentre os classificados como não portadores.

Algumas variações nos dados também originam resultados interessantes.

Por exemplo:

Se 0,5% da população é portadora e o teste acerta em 98% dos casos, *então* somente 20% das pessoas que o teste classificou como portadoras são realmente portadoras.

Dependendo dos objetivos, pode-se a partir daí enunciar o conceito de probabilidade condicional ou mesmo desenvolver tópicos em Estatística; no entanto, a grande qualidade desse problema é apresentar uma situação de real interesse dos nossos alunos, com uma abordagem bastante intuitiva.

Nota

Esperamos que nenhum leitor use este artigo como justificativa para não se submeter a testes e exames clínicos solicitados por seu médico. O que o exemplo permite concluir é que, como todo teste está sujeito a erros, dificilmente se justifica a sua aplicação indiscriminada a toda uma população. É importante observar, no entanto, que, quando o médico pede exames, ele tem razões para suspeitar que exista algo errado com o paciente e, portanto, a probabilidade condicional de que ele esteja doente é, em geral, bem maior do que a incidência da doença na população toda.

Média e média das médias

Adaptado do artigo de
Adilson Simonis
Cláudio Possani

*O*s Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) preconizam que se aborde, desde o ensino fundamental, noções básicas de Estatística. Pretende-se que o estudante seja confrontado com situações concretas de análise de dados através de gráficos ou tabelas, introduzindo conceitos fundamentais para a compreensão dos fenômenos do dia-a-dia. Entre esses conceitos, um de vital importância é a ***média*** de uma seqüência de valores numéricos. Nosso objetivo neste artigo é pontuar alguns aspectos desse conceito que possam ser úteis ao professor de Matemática.

Existem várias noções de média aritmética, geométrica, harmônica, simétrica, etc. Vamos nos ocupar, neste artigo, da média aritmética, que passamos a denominar apenas *média.*

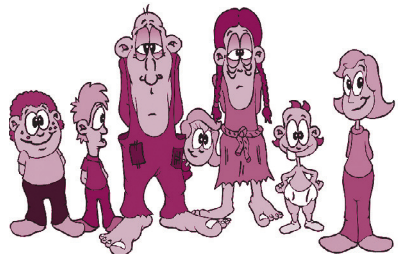
Dados os números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (não necessariamente distintos), a *média* desses valores é definida

como sendo $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$.

Uma dúvida muito freqüente acerca das médias é a seguinte: se temos duas seqüências de números A_1 e A_2 com médias μ_1 e μ_2, respectivamente, e queremos obter a média da união dessas seqüências, é correto fazer $(\mu_1 + \mu_2)/2$ ou devemos somar todos os números e dividir pelo número total de valores? Esses dois procedimentos levam ao mesmo resultado? Vejamos através de um exemplo que os resultados podem ser diferentes.

Suponha que um professor peça a cada um de seus alunos que calcule a idade média de sua própria família, e imaginemos a seguinte situação:

Aluno *A*	Aluno *B*
Pai: 40 anos	Pai: 39 anos
Mãe: 37 anos	Mãe: 40 anos
A: 13 anos	*B*: 12 anos
	Irmão: 10 anos
	Irmã: 9 anos



A idade média da família de *A* é $\mu_1 = (40 + 37 + 13)/3 = 30$ anos, e da família de *B* é $\mu_2 = (39 + 40 + 12 + 10 + 9)/5 = 22$ anos.

Observemos agora os valores:

$$(\mu_1 + \mu_2)/2 = 26 \quad \text{e}$$

$$\mu_3 = (40 + 37 + 13 + 39 + 40 + 12 + 10 + 9)/8 = 25.$$

Primeiramente salientamos que não cabe dizer que um procedimento é mais correto que o outro. Cada um deles tem um significado diferente e é correto no contexto adequado.

O valor 26 é a média das idades médias das famílias. Assim, se estivermos interessados em saber se as famílias de uma cidade ou do Brasil são famílias jovens ou não, esse é o tipo de valor que devemos calcular.

Por outro lado, se calculamos a soma total dividida pelo número total de pessoas (μ_3), obtemos a idade média do total de pessoas (e não de famílias). É o que fazemos para obter a idade média da população de uma cidade ou país.

Um outro exemplo no qual os dois procedimentos apresentam resultados diferentes é:

Seqüência 1 de dados: 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10. $\mu_1 = 10$.

Seqüência 2 de dados: 5, 5. $\mu_2 = 5$.

$$(\mu_1 + \mu_2)/2 = (10 + 5)/2 = 7{,}5 \ \text{ e } \ \mu_3 = 9.$$

Ao calcular 7,5, os dois valores, 10 e 5, aparecem com o mesmo peso, enquanto o cálculo de μ_3 reflete o fato de o valor 10 aparecer mais vezes na primeira seqüência do que o valor 5 aparece na segunda.

É fácil ver que, se duas seqüências numéricas, A_1 e A_2, têm o mesmo número de elementos, então os dois procedimentos descritos anteriormente fornecem valores iguais. De fato, sejam $A_1 = \{x_1, ..., x_n\}$ e $A_2 = \{y_1, ..., y_n\}$.

Então

$$(\mu_1 + \mu_2)/2 = \frac{\dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n} + \dfrac{y_1 + \cdots + y_n}{n}}{2} = \frac{x_1 + \cdots + x_n + y_1 + \cdots + y_n}{2n} = \mu_3.$$

Vamos mostrar agora como se procede para avaliar a média quando não são conhecidos todos os elementos da seqüência numérica.

Em um determinado conjunto ou seqüência de valores numéricos, dois parâmetros são de especial interesse. Ambos são médias e podem surpreender pela quantidade de informação que podemos obter a partir deles sobre a totalidade dos valores numéricos que temos. O primeiro é a média, e o segundo a *variância*, definida como sendo a média dos quadrados das diferenças entre cada valor e a média.

Vamos exemplificar esses dois conceitos. Considere a seguinte seqüência numérica que denotamos por $\wp$:

$$\wp = \{2, 3, 3, 10, 12\}.$$

A média é dada pelo valor 6. Essa quantidade expressa um certo centro de gravidade da seqüência, mas certamente nos informa muito pouco sobre como a seqüência é formada. Se você sabe que a seqüência numérica não é constante, pode apostar que existem valores menores e maiores, centrados em 6, mas não pode dizer muito mais do que isso, embora

saber que a média dos salários dos políticos brasileiros é alta possa ajudar a entender por que existem tantos candidatos a determinado cargo público.

Se a seqüência $\wp$ representa o salário (em salários mínimos) de 5 professores de Matemática, e considerando que dois ou três salários mínimos não representam um bom salário, você tem que 3 dentre os 5 ganham mal e abaixo da média. Como tentar incorporar essa variabilidade em relação ao valor médio?

É o conceito de variância, denotada por σ^2, que tenta expressar a dispersão dos valores em torno da média. O valor 2 (do professor com o salário mais modesto) tem uma distância a μ, ao quadrado, dada por $(2-6)^2 = 16$, enquanto o valor 12 (o marajá do grupo) tem a distância ao quadrado de μ dada por $(12-6)^2 = 36$. Fazendo a média de todas as distâncias ao quadrado, encontramos

$$\sigma^2 = (16+9+9+16+36)/5 = \frac{86}{5} = 17{,}2\,.$$

Como essa distância média fornece os valores dos quadrados dos salários, é usual retornar ao velho, estável e bom salário mínimo tomando a raiz quadrada, e teremos então o valor conhecido como *desvio padrão.*

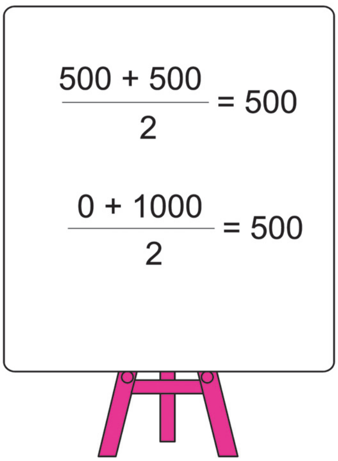
O que significa o desvio padrão dado no exemplo por $\sqrt{17{,}2} = 4{,}15$? A resposta informal que daremos aqui ficará interessante se imaginarmos um conjunto com centenas de valores (os salários dos professores de Matemática no Brasil, por exemplo) e não apenas os cinco do nosso exemplo. Temos que o valor médio das diferenças, em módulo, entre os valores e sua média é dado por

$$\frac{4+3+3+4+6}{5} = 4\,.$$

O desvio padrão σ possui uma interpretação muito próxima do valor obtido acima (4) e expressa a idéia de concentração ou não em torno da média. A escolha de σ tem vantagens computacionais em relação à média dos módulos e talvez por isso o seu uso seja muito difundido.

O intervalo $(\mu - \sigma;\, \mu + \sigma) = (6 - 4{,}15;\, 6 + 4{,}15) = (1{,}85;\, 10{,}15)$, que no nosso exemplo exclui apenas o marajá, é amplamente utilizado em estatística aplicada quando o conjunto de valores é grande, e podemos argumentar que nesse caso contempla aproximadamente 70% das observações, enquanto o intervalo $(\mu + 3\sigma,\, \mu - 3\sigma)$ contempla aproximadamente 99% das observações.

Podemos considerar o desvio padrão discutido como uma medida de dispersão dos dados, isto é, quanto menor σ^2, mais concentrados em torno da média estão as observações. Quando os jornais afirmam que a distribuição de renda dos trabalhadores brasileiros (e não apenas dos professores) é injusta, no fundo, afirmam que a variância é grande. Muitos pobres (professores?) e poucos ricos (políticos?). Por outro lado, se $\sigma^2 = 0$, teríamos todos os valores iguais e, como disse Nélson Rodrigues, a unanimidade é burra.



Número de regiões: um problema de contagem

Adaptado do artigo de
Antônio C. Patrocínio

Muitos problemas em Matemática envolvem processos adequados de "contagem" que, freqüentemente, conduzem a fórmulas gerais extremamente úteis; por exemplo, para contar de quantas maneiras distintas podemos combinar n objetos em grupos de r desses objetos, usamos a conhecida fórmula que dá o número de *combinações* de n objetos tomados r a r, a saber:

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Vamos analisar um problema de contagem do número de regiões no plano que pode ser resolvido de maneira direta, simples e interessante. Trata-se do seguinte:

Considere 100 pontos distribuídos sobre uma circunferência, de tal modo que o segmento ligando dois quaisquer desses pontos não passe pelo ponto de intersecção de outros dois segmentos. Calcular o número R de regiões obtidas no círculo quando todos os 100 pontos estiverem ligados.

Inicialmente, tentamos resolver o problema com um número menor de pontos. Examinando os casos 2, 3, 4 e 5 pontos, temos:

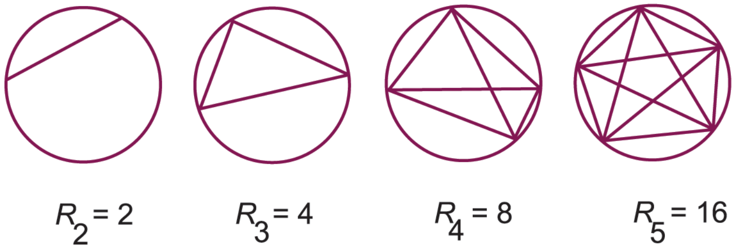


Figura 1

Observamos que:

com 2 pontos temos 2^1 regiões;

com 3 pontos temos 2^2 regiões;

com 4 pontos temos 2^3 regiões;

com 5 pontos temos 2^4 regiões.

Os resultados levam a acreditar que 6 pontos fornerceriam $2^5 = 32$ regiões, logo 100 pontos forneceriam 2^{99} regiões, e, por analogia (incorreta, como veremos) n pontos determinariam 2^{n-1} regiões! Mas, ao verificar diretamente o que acontece com 6 pontos, vemos que ficam determinadas 31 regiões, e não 32.

Logo, a generalização pretendida não é verdadeira.

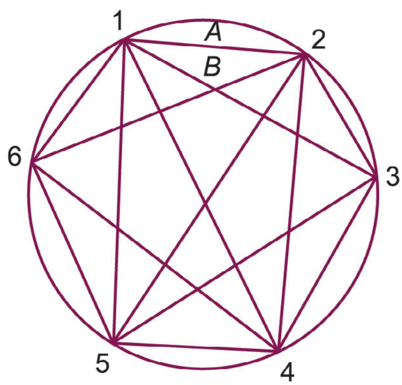


Figura 2

Como determinar uma "fórmula" que forneça o número de regiões obtidas com 100 (ou um outro número qualquer) pontos?

Solução 1

Os segmentos ligando dois a dois os 100 pontos serão chamados "diagonais"; como para cada dois pontos temos uma diagonal, o número delas é $C_{100,2} = \binom{100}{2}$, e o número de pontos de intersecção das diagonais é $C_{100,4} = \binom{100}{4}$, visto que cada 4 pontos determinam duas diagonais, as quais têm um ponto em comum.

Vamos descrever um processo que nos permite obter o número de regiões pela *eliminação sucessiva de diagonais.*

Ao retirarmos uma das diagonais, o número de regiões vai diminuir, visto que duas regiões que têm em comum um segmento da diagonal retirada fundem-se em uma única região.

Por exemplo, na figura 2, a retirada da diagonal D_{12}, que liga os pontos 1 e 2, faz com que as regiões A e B se transformem em uma única região; a retirada da diagonal D_{35} transforma em quatro as oito regiões que têm partes dessa diagonal como arestas.

Podemos observar que, ao retirarmos uma diagonal, o *número de regiões decresce conforme o número de pontos de intersecção dessa diagonal com aquelas que ainda não foram removidas, mais um.* Com efeito, esse é o número de segmentos nos quais os referidos pontos de intersecção dividem a diagonal, e a remoção de cada um desses segmentos transforma duas regiões em uma. Assim, a remoção da diagonal D_{12}, que não tem ponto de intersecção com as demais, produz um decréscimo de apenas *um* no número total de regiões; já a retirada da diagonal D_{35}, que tem 3 pontos de intersecção com as demais diagonais, produz um decréscimo de 4 regiões.

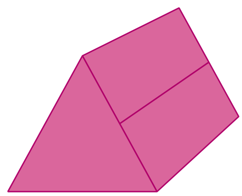
Notemos que, no processo de retirada sucessiva das diagonais, considera-se o número de pontos de intersecção de cada diagonal com aquelas que ainda não foram retiradas; no final do processo, ao serem retiradas, sucessivamente, todas as diagonais, tal número é igual ao número total de pontos de intersecção de todas as diagonais, ou seja $C_{100,4} = \binom{100}{4}$; ao mesmo tempo, o número de regiões decresce até reduzir-se a uma única região, quando todas as diagonais tiverem sido eliminadas. Podemos então concluir que o número de regiões eliminadas no processo de retirada sucessiva de todas as diagonais é dado pelo número total de pontos de intersecção de todas as diagonais, ou seja , $C_{100,4} = \binom{100}{4}$, acrescido de tantas parcelas iguais a 1 quantas são as diagonais, ou seja, $C_{100,2} = \binom{100}{2}$. Portanto, o número inicial de regiões, que é igual ao número de regiões eliminadas mais uma, a que restou no final do processo, é dado por

$$R_{100} = \binom{100}{0} + \binom{100}{2} + \binom{100}{4} = 3686101.$$

Observe que, para n pontos, temos a mesma expressão, apenas trocando o 100 por n. E, para 6 pontos, a fórmula obtida fornece

$$R_6 = \binom{6}{0} + \binom{6}{2} + \binom{6}{4} = 31,$$ como havíamos verificado!

Solução 2



Em Geometria, uma das fórmulas mais notáveis é a chamada "fórmula de Euler", que estabelece uma relação entre o número de vértices, arestas e faces de um poliedro: $V - A + F = 2$.

Mostraremos, em seguida, como a fórmula que fornece o número de regiões determinadas por n pontos pode ser obtida a partir da fórmula de Euler; o que era de se esperar, pois a demonstração mais conhecida da fórmula de Euler, devida a Cauchy, começa removendo uma face do poliedro e deformando a parte restante em uma região plana que é um polígono subdividido pelas arestas do poliedro.

Para poliedros planos, como o da figura 2, obtidos pela interligação de n pontos na circunferência, a fórmula de Euler se reduz a

$$V - A + F = 1. \qquad (1)$$

Vamos calcular, separadamente, V, A e F em função de n e substituí-los na fórmula (2) para obter R_n.

Cálculo do número de vértices

Para cada 4 vértices na circunferência existem dois, e apenas dois, segmentos que se cruzam, e portanto determinam um vértice interno, de modo que o número desses vértices é $C_{n,4} = \binom{n}{4}$, ou seja:

$$V = n + \binom{n}{4}. \qquad (2)$$

Cálculo do número de arestas

Cada vértice externo contribui com $(n-1)$ arestas, e cada vértice interno com 4 arestas, de modo que:

$$2A = n(n-1) + 4\binom{n}{4} \quad \text{e, portanto,}$$

$$A = n(n-1)/2 + 2\binom{n}{4} = \binom{n}{2} + 2\binom{n}{4}. \qquad (3)$$

Cálculo do número de regiões

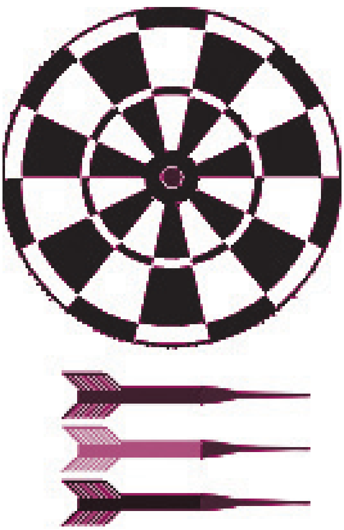
O número R_n é obtido acrescentando-se a F o número n de regiões compreendidas entre o poliedro plano e a circunferência, de modo que

$$F = R_n - n. \qquad (4)$$

Basta agora substituir (2), (3) e (4) na fórmula (1) para se obter o valor de R_n, na mesma expressão da solução 1.

Probabilidade geométrica e o problema do macarrão

Adaptado do artigo de
Eduardo Wagner

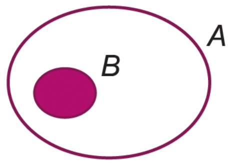


No ensino médio, o ensino de probabilidades se restringe ao caso finito, e os problemas são basicamente de contagem de casos favoráveis e casos possíveis. Existem, entretanto, problemas muito simples e interessantes de probabilidades em que o espaço amostral possui a situação do seguinte exemplo: um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central.

Tenho sugerido esse problema a alunos do ensino médio e freqüentemente obtenho deles respostas corretas, baseadas unicamente na intuição. Como obviamente não se pode contar casos favoráveis e possíveis, e como para o atirador cego não há pontos privilegiados do alvo, a probabilidade de acertar o disco central deve ser a razão entre as áreas do disco e do alvo. Um cálculo elementar leva à resposta correta: 4%.

Esse é um exemplo do que se chama probabilidade geométrica. Nesta, se tivermos uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será:

$$p = \frac{\text{área de } B}{\text{área de } A}$$



Em diversos problemas, entretanto, precisaremos escolher um ponto de uma determinada "linha". Se X e Y são pontos de uma linha de extremos A e B, admitimos que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será

$$p = \frac{\text{comprimento de } XY}{\text{comprimento de } AB}$$

Vamos descrever neste artigo um problema em probabilidade geométrica, conhecido hoje como o *problema do macarrão*. Antes de abordá-lo, vamos falar alguma coisa sobre freqüência e probabilidade.

Freqüência e probabilidade

Na prática, existem inúmeros problemas em que precisamos estimar a probabilidade de um evento, mas não podemos calculá-la. Qual é a probabilidade de um avião cair? Qual é a probabilidade de que um carro seja roubado? Qual é a probabilidade de que um estudante, entrando numa universidade, termine seu curso? Respostas para esses problemas têm imensa importância e, como não podemos calcular essas probabilidades, tudo o que podemos fazer é observar com que freqüência esses fatos ocorrem. Com um *grande* número de observações, dividindo o número de vezes que determinado fato ocorreu pelo número de observações feitas, obtemos uma estimativa da probabilidade desse evento.

Nos casos em que procuramos estimar probabilidades por meio de experiências, dúvidas certamente surgem. Não estamos sendo de alguma forma tendenciosos? Os experimentos foram realizados em condições idênticas? Eles podem ser considerados como independentes?

Vamos mostrar um caso no qual o valor estimado e o valor teórico foram bastante diferentes.

O problema do macarrão

Durante um curso de aperfeiçoamento de professores de Matemática do ensino médio, promovido pelo IMPA, RJ, fiz uma interessante experiência, que passo a relatar.

Em uma aula com 60 professores, distribuí um espaguete a cada um deles. Sem que eles soubessem o que iria ocorrer, pedi a cada um que partisse o espaguete, ao acaso, em três pedaços. Em seguida, pedi que cada um verificasse se conseguiam formar um triângulo com os seus três pedaços. Dos 60 professores, 41 conseguiram formar um triângulo com os três pedaços do espaguete.

Escrevi no quadro um problema:

Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

Ninguém imaginava na ocasião como esse problema poderia ser resolvido, mas a experiência feita com o macarrão indicava que essa probabilidade deveria ser estimada em $41/60 \cong 0,68$. É claro que 60 experiências é pouco para que se possa confiar no resultado, mas era opinião geral que a resposta correta não deveria ser muito distante $1 - x - y$.

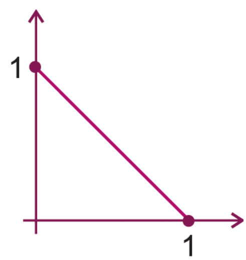
Uma solução do problema

Tomemos um segmento de reta AB de comprimento 1. Vamos dividi-lo em três partes: uma, AP, de comprimento x, outra PQ, de comprimento y e a terceira, QB, naturalmente com comprimento .

Cada forma de dividir o segmento unitário fica então associada ao par ordenado (x, y) onde

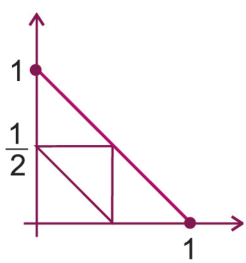
$$x > 0,\ \ y > 0 \ \text{ e } \ x + y < 1.$$

Isso corresponde, no plano cartesiano, à região triangular que mostramos ao lado. Portanto, cada forma de dividir um segmento em três partes está agora representada por um ponto interior ao triângulo da figura.



Entretanto, não são todas as divisões que formam triângulos. Um triângulo existe se, e somente se, cada lado for menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semiperímetro, que no nosso caso é igual a 1/2.

Temos, portanto, $x < \frac{1}{2}, y < \frac{1}{2}, 1 - x - y < \frac{1}{2}$.



A última condição é naturalmente equivalente a $x + y < \frac{1}{2}$ e, reunindo as três, temos que a região *favorável* é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial.

Ora, o triângulo formado pelos pontos médios tem área igual a 1/4 da área do triângulo grande, o que nos leva a concluir que a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é 0,25.

Esse resultado causou espanto na platéia. Por que a experiência forneceu um resultado tão distante? A resposta está na própria realização da experiência. Quando pedi aos professores que dividissem o espaguete ao acaso, em três partes, isso não foi feito aleatoriamente.

Ninguém fez uma parte muito pequena em relação às outras, ou seja, a maioria partiu seu espaguete em pedaços de comprimentos próximos. Por isso, o resultado da experiência ficou muito distante do esperado.

O jogo de pôquer e o cálculo de probabilidades

Adaptado do artigo de
Flávio Wagner Rodrigues

O jogo de pôquer é uma fonte bastante rica em exemplos e problemas interessantes, que podem ser utilizados para ilustrar aulas de Análise Combinatória e Probabilidade no ensino médio. Neste artigo serão apresentados alguns exemplos que servirão para mostrar como a hierarquia dos valores dos jogos no pôquer pode ser afetada pelo número de cartas utilizadas no jogo.

Em benefício dos leitores que desconhecem totalmente o assunto (e que tiveram curiosidade suficiente para iniciar a leitura), daremos uma breve descrição das regras e dos objetivos do jogo. Essa descrição limitar-se-á a considerar a forma clássica do jogo, o assim chamado pôquer fechado de 5 cartas.

No Brasil, o jogo utiliza um baralho comum de 52 cartas ou apenas uma parte dele, dependendo do número de parceiros envolvidos. Assim, por exemplo, quando o número de participantes é igual ou inferior a quatro, são eliminadas do baralho todas as cartas, cujos valores são 2, 3, 4, 5 e 6, restando as trinta e duas cartas cujos valores vão do 7 até o Ás. Na medida em que o número de participantes vai aumentando, as cartas de valor 6, 5, 4 etc., vão sendo introduzidas, até que com oito participantes, o baralho todo é utilizado. Na formação de seqüências, o Ás tem um duplo papel, funcionando como a carta mais alta e também como a carta de menor valor. Assim, por exemplo, se a menor carta em jogo é o 7, numa seqüência o Ás poderá valer 6.

O objetivo do jogo é combinar as cartas de modo a formar o melhor jogo possível, segundo uma hierarquia estabelecida pelas regras. Na primeira etapa do jogo cada participante recebe cinco cartas, seguindo-se uma rodada de apostas, que obedece a um conjunto de regras que não interessam aos objetivos deste artigo. A seguir é facultado a cada jogador desfazer-se de até no máximo três de suas cartas, recebendo novas, dentre aquelas que restaram no baralho. É a chamada fase das pedidas. Após uma nova rodada de apostas, os participantes que permaneceram no jogo, isto é, que pagaram todas as apostas feitas, mostram suas cartas, e o dinheiro arrecadado vai para aquele que tiver o maior jogo.

Do ponto de vista do cálculo de probabilidades, existem, portanto, dois problemas distintos a serem considerados. O primeiro deles envolve as probabilidades de que determinadas combinações de cartas sejam obtidas “de mão”, isto é, estejam contidas nas cinco cartas recebidas na primeira fase do jogo. O segundo, bem mais complexo, envolve as probabilidades de se melhorar o jogo na fase das pedidas, o que não será tratado neste artigo.

A seguir daremos uma descrição dos jogos em ordem decrescente de seus valores. Alguns nomes foram mantidos em inglês, por já estarem consagrados pelo uso e também por não conhecermos uma tradução adequada.

1) *Royal Straight Flush*

É uma seqüência formada por um 10, um valete, uma dama, um rei e um Ás, todos de um mesmo naipe. Existem apenas quatro *royal straight* *flushes* no jogo, sendo um de cada naipe. Utilizando 36 cartas, a chance de recebermos um *royal* de mão é de apenas uma em 94248. Para aqueles que acharem essa probabilidade muito pequena, é importante notar que ela é cerca de três vezes maior do que a de acertarmos a quina da Loto, com um jogo de 10 dezenas.

2) *Straight Flush*

É qualquer seqüência de cartas de um mesmo naipe que não seja um *roya*l. Com 36 cartas, o Ás pode ocupar o lugar do 5, o que nos dará um total de 20 *straight flushes*. Com o baralho todo, o número de jogos deste tipo é igual a 36.

3) *Quadra*

É o jogo formado por quatro cartas de mesmo valor e de uma quinta carta qualquer. Assim, por exemplo, uma quadra de reis poderia ser formada pelos 4 reis e por uma dama.

4) *Flush*

É um conjunto de cartas de um mesmo naipe que não estão em seqüência. Assim, por exemplo, um *flush* de espadas poderia ser formado pelo 7, 9, Valete, Dama, Ás, todos de espadas.

5) *Fullhand*

É o jogo composto por uma trinca (três cartas de mesmo valor) e um par (duas cartas de mesmo valor). Assim, por exemplo, um *fullhand* de dama com valete é formado por três damas e dois valetes. É um jogo distinto do *fullhand* de valete com dama, que é composto por três valetes e duas damas.

6) *Seguida*

É o jogo composto por 5 cartas em seqüência, nem todas do mesmo naipe.

Exemplo: 9 de ouros, 10 de paus, valete de copas, dama de ouros, rei de paus.

7) *Trinca*

É o jogo composto por três cartas de mesmo valor (por exemplo, três reis) e duas outras cartas quaisquer, que não formam par e que tenham valores distintos das cartas que compõem a trinca.

Exemplos: 1) 9, 9, 9, D, R;

2) V, V, V, 7, 10.

8) *Dois pares*

Como o próprio nome indica, é o jogo composto por dois pares e por uma quinta carta de valor distinto daquelas que compõem os dois pares.

Exemplo: A, A, R, R, 8.

9) *Um par*

É o jogo composto por um único par e por três outras cartas de valores distintos entre si e distintos daquelas que compõem o par.

Exemplo: 7, 7, 8, V, D.

10) *Nada de interesse*

São todos os jogos pertencentes ao complementar da união dos jogos descritos acima. Se você receber um jogo deste tipo não se julgue um infeliz perseguido pelos deuses. A probabilidade de que isso ocorra é bastante alta, indo de cerca de 25%, com 32 cartas, até mais de 50% quando todo o baralho é utilizado.

Na descrição acima foram apresentados alguns resultados de contagens de totais de jogos de um determinado tipo e foram feitas afirmações sobre as probabilidades de obtenção de outros jogos. Nos exemplos seguintes procuraremos mostrar como são feitos esses cálculos. Em todos eles suporemos que estão sendo usadas 32 cartas, das quais um particular jogador receberá cinco escolhidas ao acaso, através do embaralhamento. Em outras palavras, estamos admitindo que os $\binom{32}{5} = 201376$ jogos possíveis têm todos a mesma probabilidade.

Exemplo 1 – *Contagem do número de "fullhands"*

Vamos iniciar com um problema mais simples, contando o número de "fullhands" de rei com dama, isto é, o número de jogos formados por três reis e duas damas. Observe que os três reis podem ser escolhidos de $\binom{4}{3} = 4$ maneiras diferentes, enquanto as duas damas podem ser escolhidas de $\binom{4}{2} = 6$ maneiras diferentes. Como cada uma das quatro trincas pode ser combinada com qualquer um dos seis pares para formar um *fullhand* de rei com dama, segue-se que existem 4 **x** 6 = 24 jogos distintos deste tipo. A próxima etapa será calcularmos quantos tipos distintos de *fullhands* existem. Para isto, vamos observar que dentre os oito grupos de cartas de mesmo valor, nós teremos que escolher um, no qual será selecionada a trinca, e um outro, do qual sairá o par. Para a primeira escolha existem 8 possibilidades e para a segunda, apenas 7, o que nos dá 8 **x** 7 = 56 tipos distintos de *fullhands*. Como cada um deles admite 24 jogos diferentes, segue-se que o total de *fullhands* é igual a 1344.

A probabilidade de recebermos um *fullhand* de mão será portanto dada por: 1344/201376 $\cong 0{,}67\%$.

Exemplo 2 – *Contagem do número de "flushes"*

Vamos considerar inicialmente *flushes* de ouros. Existem oito cartas de ouros, dentre as quais podemos selecionar $\binom{8}{5} = 56$ conjuntos distintos de cinco cartas. Como o mesmo raciocínio pode ser feito para os outros três naipes, teríamos aparentemente $56 \times 4 = 224$ *flushes*. No entanto, é fácil ver que neste total estão incluídos os quatros *royal straight flushes* e os 16 *straight flushes*. Segue-se portanto que, com 32 cartas, existirão 204 *flushes* puros.

Exemplo 3 – *Contagem do número de trincas*

Esse cálculo pode ser feito diretamente, de maneira análoga à que foi utilizada para contar o número de *fullhands*. No entanto, como este número já foi obtido, podemos utilizá-lo para contar o número de trincas de um modo indireto e mais rápido.

Vamos escolher uma das quatro trincas de reis e combiná-la com duas cartas quaisquer escolhidas entre as 28 que restam, quando excluímos os quatro reis. Isto nos dará um total de $\binom{4}{3} \times \binom{28}{2} = 4 \times 378 = 1512$ jogos.

Levando em consideração as demais trincas, teríamos $8 \times 1512 = 12096$ jogos. Neste total não existem quadras, pois o grupo que fornece a trinca é todo ele excluído na seleção seguinte. No entanto, é claro que nele estarão incluídos todos os *fullhands*. Subtraindo 1344 de 12096 encontraremos para o total de trincas o valor 10752, o que nos dará para a probabilidade de obtenção de uma trinca "de mão", o valor aproximado de 5,4%.

O leitor que comparar o ranking dos jogos encontrado na Enciclopédia Britância com o nosso verá que há uma inversão de posições entre o *fullhand* e o *flush*. Isto se deve ao fato de que lá a descrição está baseada na utilização do baralho completo, o que torna o *flush* mais fácil de ser obtido de mão do que o *fullhand*. É interessante observar ainda que com 32 cartas o *flush* é mais difícil de ser obtido "de mão" do que uma quadra. Essa mudança no valor relativo dos jogos, que será mostrada nos exemplos seguintes, deve-se ao fato de que os jogos não têm todos a mesma natureza. É claro que nenhuma mudança no número de cartas poderia fazer com que uma quadra ficasse mais fácil de ser obtida do que uma trinca. Jogos como a quadra, o *fullhand* e a trinca dependem de seleções feitas nos conjuntos de cartas de mesmo valor, enquanto um jogo como o *flush* depende de escolhas feitas nos conjuntos de cartas de mesmo naipe. É razoável portanto que uma mudança no número de cartas faça com que as probabilidades

variem num mesmo sentido, mas não necessariamente com a mesma intensidade.

Exemplo 4 – *Cálculo do número de quadras*

Utilizando 32 cartas, uma quadra de reis é um jogo formado pelos quatro reis e por uma quinta carta escolhida dentre as 28 restantes. Existem portanto 28 jogos que contêm uma quadra de reis. O mesmo raciocínio aplicado às demais cartas nos permite concluir que com 32 cartas teremos um total de 8 **x** 28 = 224 quadras. Vimos no Exemplo 2 que o número de *flushes* puros é de apenas 204, o que justifica a nossa observação de que, com 32 cartas, o *flush* é mais difícil de ser obtido de mão do que a quadra.

Observação

A situação se inverte quando passamos a usar 36 cartas. Adaptando os cálculos feitos nos exemplos 2 a 4 para essa situação, vemos que o número de quadros passa a ser 288, enquanto que o número de “flushes” será igual a 480.

Exemplo 5 – *Número de “flushes” e “fullhands” com 52 cartas*

(a) Quando o baralho todo é utilizado, o número de cartas de ouros é igual a 13, existindo portanto $\binom{13}{5} = 1287$ conjuntos distintos de cinco cartas de ouros. Considerando os demais naipes, teríamos um total de $4 \times 1287 = 5148$ jogos. Subtraindo deste total os 4 *royal straight flushes* e os 36 *straight flushes*, teremos um total de 5108 *flushes* puros.

(b) É fácil ver que para cada tipo de *fullhand* continuaremos a ter 24 jogos possíveis. Agora, no entanto, dispomos de 13 grupos de cartas de mesmo valor, o que nos dará $13 \times 12 = 156$ tipos diferentes de *fullhands*. Portanto o número total de *fullhands* será $24 \times 156 = 3744$.

Como pode ser visto nos exemplos acima, o *flush* desempenha um papel curioso na hierarquia dos jogos do pôquer. Ele, que com 32 cartas é o terceiro jogo mais difícil de ser obtido, cede essa posição para a quadra a partir das 36 cartas e finalmente termina na quinta posição, cedendo a quarta para o *fullhand*, quando o baralho todo é utilizado.

Esperamos que a discussão feita até aqui sirva de motivação e estímulo para que o leitor faça as contagens correspondentes aos demais jogos do pôquer.

Um problema teórico interessante, que poderia ser proposto a estudantes curiosos, seria a análise de que outra mudanças poderiam ocorrer se o número de cartas não fosse limitado em 52. Para isto, poderíamos imaginar um baralho com quatro naipes e $4n$ cartas numeradas de 1 a n, com o 1 representando o duplo papel que cabe ao Ás no baralho comum. Será que existe algum valor de n a partir do qual o *flush* fica mais fácil de ser obtido do que uma trinca? Será que as seguidas permaneceriam sempre na mesma posição?

Para concluir, vamos fazer um breve comentário sobre as probabilidades envolvidas na segunda fase do jogo, isto é, na fase das pedidas. Vamos supor que você seja o primeiro a pedir cartas num jogo com 4 participantes e que portanto restam no baralho 12 cartas. Você recebeu quatro cartas de ouros e uma de espadas (que você descartou). Qual é a probabilidade de que você consiga fechar um *flush* de ouros?

Como a carta que você vai receber é a vigésima-primeira, o que se deseja é a probabilidade de que num conjunto de 32 cartas, bem embaralhadas, a vigésima-primeira seja uma carta de ouros. Se você não tivesse olhado suas cartas, isto é, não dispusesse de nenhuma informação adicional, a resposta a essa pergunta seria obviamente 1/4. No entanto, como você olhou suas cartas, o que precisamos é da probabilidade condicional de que a vigésima-primeira carta seja de ouros dado que entre as 20 primeiras cartas existiam pelo menos quatro cartas de ouros e pelo menos uma de espadas.

Eventos independentes

Adaptado do artigo de
Flávio Wagner Rodrigues

Neste artigo são discutidos alguns aspectos ligados à noção de independência de dois eventos na Teoria das Probabilidades. Os objetivos principais são analisar o conceito formal, relacionando-o com a idéia intuitiva, que as pessoas geralmente têm sobre as relações entre os fenômenos que elas observam na sua vida diária.

Vamos, inicialmente, recordar alguns conceitos básicos da Teoria da Probabilidade. A teoria tem por objetivo fornecer um modelo matemático para experimentos aleatórios, isto é, para experimentos que, "repetidos" em idênticas condições, produzem, geralmente, resultados distintos.

A todo experimento aleatório está associado o conjunto S, chamado espaço amostral, composto por todos os resultados possíveis do experimento.

Assim, considerando o lançamento de um dado, o espaço amostral naturalmente associado a este experimento é

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Se S é um espaço amostral finito chamamos evento a qualquer subconjunto de S e diremos que ocorreu o evento $A \subset S$, quando o resultado do experimento for um elemento de A.

No caso do lançamento de um lado, o evento: "o resultado é par" é o subconjunto $A = \{2, 4, 6\} \subset S$, e se, ao lançarmos o dado, obtivermos "4", diremos que o evento A ocorreu.

Cada subconjunto unitário de S chama-se evento elementar, isto é, se $S = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ então, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$,... são eventos elementares. Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento elementar $\{x_i\}$ um número p_i, $0 \leq p_i \leq 1$, de tal modo que $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

A probabilidade de um evento qualquer $A \subset S$ será, por definição, a soma das probabilidades dos eventos elementares contidos em A e indicaremos por $P(A)$.

Retomando o exemplo do dado e supondo agora que o lançamento seja o de um dado honesto, a cada evento elementar $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$, é associada a probabilidade 1/6.

Nessas condições, se A é o evento "o resultado é par",

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.$$

Começaremos com a definição formal de independência. À primeira vista, os exemplos poderão parecer contrários à noção intuitiva de "independência". Com a introdução do conceito de probabilidade condicional e a análise de mais exemplos, esperamos deixar claro o que sejam "eventos independentes", conciliando, assim, a definição formal com intuição.

Definição

Dois eventos, A e B, de um mesmo espaço amostral (isto é, dois eventos associados ao mesmo experimento aleatório), são independentes quando a probabilidade de que eles ocorram

simultaneamente for igual ao produto de suas probabilidades individuais. Em símbolos, A e B serão independentes quando:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

Exemplo 1

Considere o lançamento de um dado honesto. O espaço amostral associado e esse experimento é o conjunto formado pelos números 1, 2, 3, 4, 5, 6, e a cada um dos quais é atribuída probabilidade 1/6. Vamos considerar os eventos:

A – “o resultado é par”;

B – “o resultado é maior do que 4”;

C – “o resultado é um múltiplo de 3”.

Os subconjuntos do espaço amostral associados a esses eventos são respectivamente: $\{2, 4, 6\}$, $\{5, 6\}$ e $\{3, 6\}$.

Segue-se então que: $P(A) = 1/2$ e $P(B) = P(C) = 1/3$.

Os eventos A e B (e também os eventos B e C) ocorrerão simultaneamente quando o resultado do lançamento for um 6.

Segue-se que $P(A \cap B) = P(B \cap C) = 1/6$.

A comparação desses valores com os produtos das probabilidades individuais mostra que A e B são independentes enquanto que B e C são dependentes.

É claro que o fato de dois eventos serem ou não independentes é determinado pelo espaço amostral e pela probabilidade definida nesse espaço. O exemplo seguinte mostra como a probabilidade escolhida afeta as relações de dependência ou independência entre eventos.

Exemplo 2

Vamos considerar o lançamento de um dado ao qual está associada a seguinte distribuição de probabilidades:

Resultado	1	2	3	4	5	6
Probabilidade	1/12	1/12	1/4	1/12	1/4	1/4

Com essa distribuição, as probabilidades dos eventos considerados no exemplo 1 terão agora os seguintes valores:

$$P(A) = P(\{2,\ 4,\ 6\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$$

$$P(B) = P(\{5,6\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(C) = P(\{3,6\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(B \cap C) = P(\{6\}) = \frac{1}{4}$$

É fácil ver que estamos diante da situação inversa daquela que ocorreu no Exemplo 1. Os eventos B e C são independentes, enquanto que A e B são dependentes.

Observação

O leitor poderá argumentar, com razão, que não é fácil transmitir a uma classe iniciante a idéia de um dado que se comporte da maneira acima. Vale lembrar, no entanto, que na realidade dos cassinos e das casas de jogos, o dado honesto do exemplo 1 talvez seja até mais fantasioso do que aquele que estamos considerando aqui. Além disso, é possível realizar esse experimento numa sala de aula, com o auxílio de uma urna e de 12 bolas numeradas com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nas proporções indicadas pela distribuição de probabilidades. A retirada de uma bola dessa urna é equivalente, em termos probabilísticos, a um lançamento do nosso dado hipotético.

Vamos apresentar mais um exemplo, tirado do livro *Uma Introdução à Teoria das Probabilidades e suas Aplicações*, de W. Feller, que mostra como a estrutura do espaço amostral afeta as relações de dependência.

Exemplo 3

Vamos considerar famílias com n crianças e admitir que todas as distribuições do sexo dessas crianças são igualmente prováveis. Seja A o evento: "existem crianças de ambos os sexos" e B o evento: "existe no máximo uma menina". Pode-se verificar que no conjunto das famílias com 3 crianças, A e B são eventos independentes o que não ocorre no conjunto das famílias com 4 crianças. O leitor interessado no cálculo dessas probabilidades pode consultar a referência citada anteriormente. Com um pouco mais de trabalho, é possível mostrar ainda que A e B só serão independentes no caso $n = 3$.

Na vida real, a independência entre dois fenômenos está associada à idéia intuitiva de que eles nada têm a ver um com o outro, não existindo entre eles nenhum tipo de relação. É natural que a descoberta da existência de algum tipo de relação entre dois fenômenos (isto é, a verificação de que eles não são independentes) seja mais importante do ponto de vista prático. Nenhum jornal abriria manchetes para afirmar, por exemplo, que a ingestão de açúcar nada tem a ver com câncer de pele. No entanto, os meios de comunicação estão sempre discutindo, entre outras, as prováveis relações entre consumo de açúcar e cárie dental e entre o excesso de exposição à luz solar e o câncer de pele.

Essa idéia intuitiva explica porque os estudantes freqüentemente confundem eventos independentes com eventos mutuamente exclusivos. De fato, a eventos mutuamente exclusivos correspondem subconjuntos disjuntos do espaço amostral. A associação entre a ausência de pontos comuns e a idéia intuitiva de independência, embora falsa, chega a ser compreensível. Quando se utiliza a definição, vê-se facilmente que, a não ser em casos muitos particulares (quando ao menos um dos eventos tem probabilidade zero), *eventos mutuamente exclusivos nunca são independentes.*

Do ponto de vista do ensino, a questão que se coloca é como apresentar num curso elementar a idéia de independência, de modo a conciliar a definição formal com as idéias intuitivas que os estudantes certamente têm sobre o assunto. O caminho natural para atingirmos esse objetivo começa necessariamente pelo conceito de probabilidade condicional, que procuramos ilustrar no exemplo seguinte.

Exemplo 4

Numa rifa são vendidos 100 bilhetes numerados de 00 à 99. Um único prêmio será entregue ao portador do bilhete que for escolhido por sorteio. Esse sorteio será realizado em duas etapas, utilizando-se uma urna com dez bolas numeradas de 0 a 9. Na primeira etapa, uma bola é escolhida ao acaso, obtendo-se assim o algarismo das unidades do número premiado; em seguida, essa bola é devolvida à urna, e repete-se o processo para que seja obtido o algarismo das dezenas.

Vamos analisar a situação de dois indivíduos, João e Paulo, cujos bilhetes têm os números 25 e 47, respectivamente. Antes de ser iniciado o sorteio (e supondo-se que ele seja honesto), os dois têm a mesma probabilidade de sucesso, igual a 1/100. Supondo-se que a primeira bola sorteada tenha o número 7, o conjunto dos resultados possíveis do sorteio se reduz a um conjunto com dez elementos, a saber: $\{07, 17, ..., 97\}$.

João já pode rasgar o seu bilhete pois, suas chances de vitória se reduziram de 1/100 para 0. Por outro lado, Paulo viu sua chance multiplicada por 10, passando de 1/100 para 1/10. Seja A o evento "Paulo ganha o prêmio", B o evento "João ganha o prêmio" e C o evento "o número sorteado termina em 7". Antes da realização da primeira etapa, tínhamos: $P(A) = P(B) = 1/100$ e $P(C) = 1/10$.

As probabilidades, 0 e 1/10, calculadas após a realização da primeira etapa, são denominadas probabilidades condicionais de B e A, respectivamente, dado que ocorreu o evento C.

No exemplo acima, as probabilidades condicionais foram calculadas por meio da redução do espaço amostral ao conjunto C, que passou a ser o espaço associado à segunda etapa do sorteio. Probabilidades condicionais podem também ser calculadas em termos das probabilidades do espaço original, como veremos na definição abaixo.

Definição

Sejam A e C dois eventos num mesmo espaço de probabilidades e suponhamos $P(C) \neq 0$. A probabilidade condicional de A, dado C, é definida como sendo:

$$P(A/C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)}. \qquad (1)$$

Observação

Da definição segue-se facilmente que se A e C são dois eventos independentes, com probabilidades positivas, teremos:

$$P(A/C) = P(A) \quad \text{e} \quad P(C/A) = P(C). \qquad (2)$$

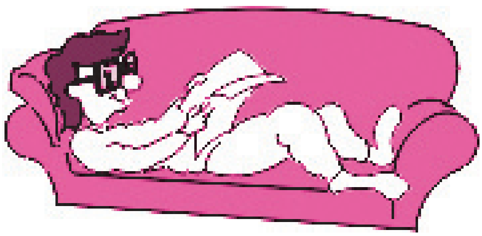
Um evento com probabilidade zero é trivialmente independente de qualquer outro, e para eventos com probabilidades positivas, a igualdade (1) é equivalente a qualquer uma das igualdades em (2). Podemos então dizer que dois eventos com probabilidades positivas são independentes, quando a probabilidades condicional de um deles, dado que o outro ocorreu, for igual à probabilidade daquele evento no espaço original. Em outras palavras, a informação adicional sobre a ocorrência de um deles não altera a probabilidade do outro. Como procuraremos ilustrar no exemplo seguinte, essa é a interpretação correta da idéia intuitiva de que um evento nada tem a ver com o outro.

Exemplo 5

Vamos considerar novamente a possibilidade da existência de algum tipo de relação entre ingestão de açúcar e incidência de câncer de pele. Vamos supor que a evidência experimental, comprovada por testes estatísticos adequados, mostre que não existe nenhum tipo de relação entre os dois fenômenos. O que isto quer dizer é que a informação adicional sobre a quantidade de açúcar ingerida por um indivíduo (seja ela grande ou pequena) não altera em nada o seu risco (medido por uma probabilidade) de vir a adquirir câncer de pele.

Fica claro agora, do ponto de vista intuitivo, porque eventos mutuamente exclusivos não são, em geral, independentes. A informação de que um deles ocorreu nos assegura que o outro não ocorrerá.

Portanto, com essa informação, a probabilidade do outro passa a ser igual a zero, isto é, se altera, a não ser que já fosse igual a zero no espaço original.



Capítulo 5

Curiosidades

Estamos assim??

Exercício

$$6 + 7 = 18$$

Análise

A grafia do número seis está absolutamente correta;

O mesmo se pode concluir quanto ao número sete;

O sinal operacional + indica-nos, corretamente, que se trata de uma adição;

Quanto ao resultado, verifica-se que o primeiro algarismo (“1”) está corretamente escrito – corresponde ao primeiro algarismo da soma pedida. O segundo algarismo pode muito bem ser entendido como um 3 escrito simetricamente – repare-se na simetria, considerando-se um eixo vertical! Assim, o aluno enriqueceu o exercício recorrendo a outros conhecimentos. . a sua intenção era, portanto, boa.

Avaliação

Do conjunto de considerações tecidas na análise, podemos concluir que:

A atitude do aluno foi positiva: ele tentou!

Os procedimentos estão corretamente encadeados: os elementos estão dispostos pela ordem precisa.

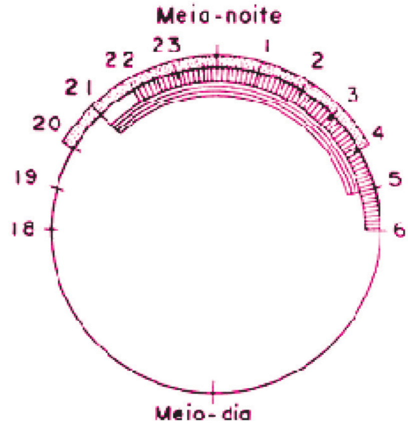
Nos conceitos, só se enganou (?) num dos seis elementos que formam o exercício, o que é perfeitamente negligenciável.

Na verdade, o aluno acrescentou uma mais-valia ao exercício ao trazer para a proposta de resolução outros conceitos estudados – as simetrias – realçando as conexões matemáticas que sempre coexistem em qualquer exercício…

Em conseqüência, podemos atribuir-lhe um “EXCELENTE” e afirmar que o aluno “PROGRIDE ADEQUADAMENTE”.

Fonte: Internet.

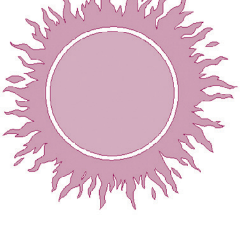
O porquê do horário de verão



*I*maginemos um mostrador de relógio com as 24 horas do dia, como se vê na figura, no qual representamos nossos hábitos de dormir. Embora as pessoas tenham costumes diferentes, podemos imaginar uma situação ideal, mais ou menos a média do que realmente acontece, com as pessoas indo dormir às 22h (10h da noite) para se levantar às 6h da manhã – um período de 8h de sono.

Ora, como é fácil compreender, por simples observação da figura, o período de 8h mais escuro da noite não é esse, mas sim o que vai das 20h (8h da noite) às 4h da madrugada – simetricamente disposto em relação à meia-noite. Este sim é que deveria ser utilizado como período de dormir, se efetivamente desejássemos dormir nas horas de maior escuridão. (Aliás, é precisamente isto o que fazem os animais que dormem durante a noite, num gesto de sabedoria instintiva: eles utilizam um período simétrico em relação à meia-noite.)

Agora é fácil entender o porquê do horário de verão: o período de 10h da noite às 6h da manhã, num relógio adiantado uma hora, corresponde, efetivamente, ao período de 9h da noite às 5h da manhã, de forma que adiantar o relógio uma hora torna mais simétrico, em relação à meia-noite, o período que utilizamos para dormir. Em conseqüência, o horário de verão faz com que economizemos horas escuras quando acordados.



Convém observar que o horário de verão só faz sentido nas regiões mais afastadas do equador terrestre, visto que, quanto mais longe do equador, mais longos se tornam os dias no verão e mais curtas as noites. Mas não é isto o que acontece em lugares como Belém ou Manaus, onde as durações dos dias e das noites sofrem variações mínimas durante o ano. É por isso que os habitantes desses lugares se opõem à adoção do horário de verão.

Brincando com a Matemática

*A*lunos gostam quando exploramos brincadeiras matemáticas ou exercícios curiosos. Aqui vai uma brincadeira que desperta grande interesse nos alunos.

Trata-se de fazer uma adição com 5 parcelas: o aluno escolhe a 1ª e eu imediatamente escrevo o resultado num papel, dobro e peço para que ele guarde o papel no bolso.

Em seguida, o aluno escolhe a 2ª parcela,
eu, a 3ª,
o aluno a 4ª,
eu, a 5ª

e aí é só conferir: a soma é igual ao número que está escrito no papel guardado no bolso do aluno (ou de algum colega).

Vejamos como isso acontece, através de um exemplo:

aluno $\rightarrow$ 827 $\rightarrow$ eu escrevo 2825 no papel

aluno $\rightarrow$ 345

eu $\rightarrow$ 654 $\rightarrow$ $345 + 654 = 999$

aluno $\rightarrow$ 208

eu $\rightarrow$ 791 $\rightarrow$ $208 + 791 = 999$

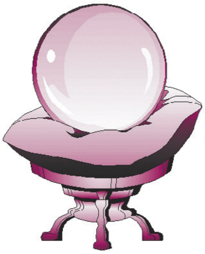
total $\rightarrow$ 2 825.

O resultado é o 1º número escolhido pelo aluno +1998.

Como $1998 = 2\,000 - 2$, dado o 827, basta subtrair 2 e somar 2 000 para obter a resposta: 2 825.

E se o aluno tivesse começado com 27? ou com 3 827?

O leitor, ao responder, poderá criar outras brincadeiras parecidas.



Adivinhação

Pede-se para alguém pensar em um número de vários algarismos e somar esses algarismos.

Em seguida pede-se que a pessoa subtraia a soma do número pensado.

A pessoa deve então ocultar um algarismo desse último resultado obtido e informar o valor da soma dos algarismos restantes. Com isso o proponente da brincadeira "adivinha" o algarismo que foi ocultado.

Exemplo

Número pensado:

$$A = 6435879$$

$$A - S = 6435879 - (6+4+3+5+8+7+9) = 6435879 - 42 = 6435837.$$

A pessoa oculta, por exemplo, o algarismo 8 e fornece a soma dos outros que é $6 + 4 + 3 + 5 + 3 + 7 = 28$. Como a soma de todos os algarismos deve ser um múltiplo de 9 (*), "adivinha-se" que o algarismo ocultado é 8, uma vez que $28 + 8 = 36$.

(*) *Proposição*

Seja A um número natural formado pelos algarismos $a_1, a_2, ..., a_n$.

Se $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$, então $A - S$ é um múltiplo de 9.

Demonstração

A prova do resultado utiliza a representação decimal do número A:

$$A = 10^{n-1}a_1 + 10^{n-2}a_2 + ... + 10a_{n-1} + a_n \text{ , logo,}$$

$$A - S = (10^{n-1} - 1)a_1 + (10^{n-2} - 1)a_2 + ... + 9a_{n-1} \text{ ,}$$

que é um múltiplo de 9.

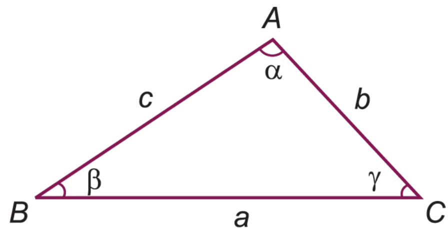
A lei dos cossenos é válida para os senos?

Adaptação do artigo de
Carlos A. Gomes

Como é?! É isso mesmo!

Veja: é fato bastante conhecido que num triângulo ABC qualquer é válida a lei dos cossenos, a saber:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



Vamos mostrar que essa relação é preservada para os senos dos ângulos internos desse triângulo, ou seja:

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma - 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha$$
$$\operatorname{sen}^2\beta = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\gamma - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma\cos\beta$$
$$\operatorname{sen}^2\gamma = \operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta - 2\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\cos\gamma$$

Com efeito, usando a também conhecida lei dos senos no triângulo ABC temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{a}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{a}{\operatorname{sen}\gamma} = 2R \quad \text{ou}$$

$$a = 2R\operatorname{sen}\alpha,\ b = 2R\operatorname{sen}\beta,\ c = 2R\operatorname{sen}\gamma\ ,$$

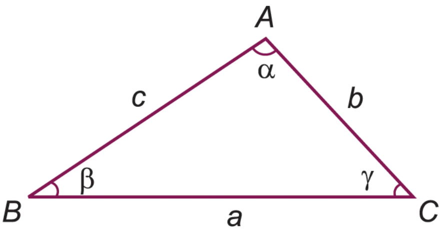
sendo R o raio da circunferência circunscrita ao triângulo, substituindo em $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$, obtemos

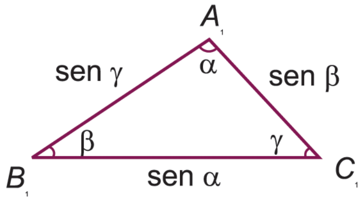
$$\operatorname{sen}^2\alpha = \operatorname{sen}^2\beta + \operatorname{sen}^2\gamma - 2\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma\cos\alpha.$$

As outras duas igualdades são obtidas de modo análogo.

Nota

As igualdades obtidas para os senos são conseqüência da semelhança dos triângulos abaixo, decorrente da lei dos senos.





O empréstimo

Estou comprando uma casa e preciso de um financiamento de 80 mil reais. Nesses casos o banco exige que a escritura seja passada por 80 mil, pelo menos. Mas o dono da casa não aceitou. Ele disse que a escritura velha era de 40 mil e que se a nova fosse de 80 mil, haveria um lucro imobiliário de 40 mil e, como o governo pega 25% desse lucro, ele teria prejuízo de 10 mil.

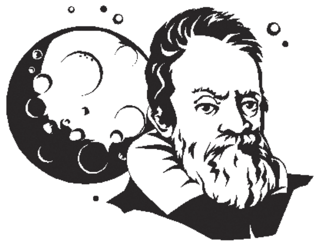
escritura	lucro imobiliário	imposto
80 mil	40 mil	10 mil

Como o negócio me interessava, propus-lhe pagar eu mesmo esses 10 mil. Para isso precisaria pegar no banco 90 mil. Mas aí o lucro imobiliário seria de 50 mil e não 40, aumentando o imposto, e por isso...

Algum colega pode me ajudar, calculando quanto devo pedir ao bando para pagar o lucro imobiliário e ficar com 80 mil?

Ou, então, me emprestar o dinheiro?

Galileu



*E*m seu trabalho sobre a queda livre dos corpos, Galileu observou:

$$\frac{1}{3}=\frac{1+3}{5+7}=\frac{1+3+5}{7+9+11}=\frac{1+3+5+7}{9+11+13+15}=\cdots$$

É possível construir outras frações com propriedades análogas a esta encontrada por Galileu?

Você sabia?

*Q*ue o quadrado de um número inteiro não pode terminar em mais de três algarismos iguais a 4 ?

O primeiro número inteiro positivo cujo quadrado termina em três algarismos iguais a 4 é o 38, cujo quadrado é igual a 1444. O inteiro seguinte é 462, cujo quadrado é igual a 213 444. Entre os 1000 primeiros inteiros positivos, existem apenas mais dois, que são 538 e 962. De um modo geral, pode-se mostrar que o quadrado de um inteiro x termina em três algarismos iguais a 4 se e só se x puder ser colocado na forma $500k \pm 38$, onde k é um inteiro. Usando esse fato, pode-se mostrar que se o quadrado de um número inteiro termina em três algarismos iguais a 4, o algarismo da unidade de milhar desse quadrado é necessariamente ímpar, o que mostra que o quadrado de um inteiro não pode terminar em mais de três algarismos iguais a 4.

Coincidência de aniversário

*E*m uma classe com 50 alunos, qual a probabilidade de que pelo menos dois deles aniversariem no mesmo dia?

Considere o evento *B*: dois alunos ou mais aniversariam no mesmo dia.

Vamos esquecer os anos bissextos e supor que temos 365 dias em um ano. Como você perceberá, é mais fácil calcular a probabilidade do evento complementar (B^c), isto é, não há coincidências de aniversários em uma classe com 50 alunos.

Como cada aluno poderá fazer aniversário em um dos 365 dias, temos 365^{50} pontos possíveis de ocorrer. Agora vamos obter o número de pontos do evento B^c. O primeiro aluno terá 365 possibilidades de escolha, o segundo terá 364 (pois deverá ser diferente do primeiro), e assim por diante até o qüinquagésimo aluno que terá (365-49) escolhas.

Desta forma,

$$P(B^c) = \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-49)}{365^{50}} = 0,030.$$

Temos assim que a probabilidade de ocorrer coincidência de aniversários em uma sala de 50 alunos será 0,970.

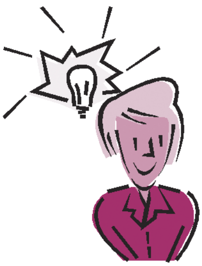
Ficou fácil ver que para uma classe de *n* alunos a probabilidade de *B* será dada por

$$P(B) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-n+1)}{365^n}.$$

Calculando $P(B)$ para alguns inteiros n, obtemos

n	$P(B)$
1	0,000
5	0,027
10	0,117
20	0,411
23	0,507
30	0,706
40	0,891
41	0,903
50	0,970
60	0,994
367	1,000

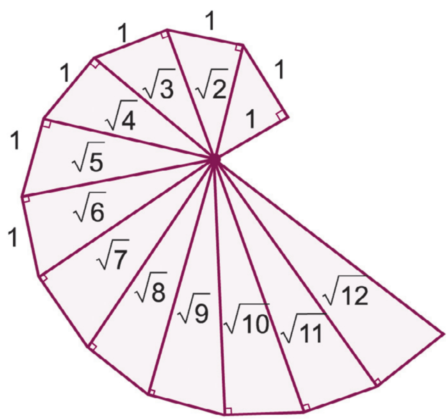
O professor de Matemática, quando ensinar Probabilidade, poderá fazer essa experiência na sala de aula. Se as turmas forem grandes é bem provável que em cada uma delas haja pelo menos uma coincidência de aniversários.



Você sabia?

Qual é a última raiz quadrada que pode ser representada na figura(sem superposição)?

Por quê?



Amigo oculto

Um grupo de 5 amigas decide fazer amigo oculto. Em uma urna improvisada são colocados os 5 nomes e cada pessoa retira um a quem deve presentear. Qual a probabilidade das amigas terem que fazer o sorteio mais de uma vez?

De fato, um novo sorteio terá que ser realizado no caso em que pelo menos uma pessoa retire seu próprio nome. Denote este evento por A.

Considere C_i o evento em que a i-ésima pessoa retira seu próprio nome para $i = 1, ..., 5$.

Queremos calcular a probabilidade do evento:

$$A = (C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5).$$

Para obtermos a $P(A)$, devemos calcular o número de pontos para cada um dos eventos abaixo:

C_i : 4! para $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

$C_i \cap C_j$: 3! para $i, j = 1, 2, 3, 4, 5$ e $i \neq j$.

$C_i \cap C_j \cap C_k$: 2! para $i, j, k = 1, 2, 3, 4, 5$ e $i \neq j \neq k$.

$C_i \cap C_j \cap C_k \cap C_l$: 1 para $i, j, k, l = 1, 2, 3, 4, 5$ e $i \neq j \neq k \neq l$.

O número total de resultados em cada sorteio será 5! pois a primeira pessoa possui 5 escolhas, a segunda pessoa 4 escolhas e assim por diante.

Finalmente, para calcularmos $P(A)$, utilizamos a propriedade da probabilidade da união de eventos e teremos:

$$P(A) = \Sigma P(C_i) - \Sigma P(C_i \cap C_j) + \Sigma P(C_i \cap C_j \cap C_k) -$$
$$\Sigma P(C_i \cap C_j \cap C_k \cap C_l) + P(C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5)$$

$$= (5.4! - 10.3! + 10.2! - 5.1! + 1)/5! = 1 - 1/2! + 1/3! - 1/4! + 1/5!$$

$$= 76/120 = 0{,}633.$$

Agora ficou fácil generalizar para qualquer grupo de n pessoas!!!

Diofante

Adaptação do artigo de
Vera Helena Giusti de Souza

Pouco se sabe sobre a vida do grego *Diofante.* Crê-se que tenha vivido em Alexandria, por volta de 250 d.C.

Sua grande obra, *Arithmetica,* tem 6 volumes preservados, mas acredita-se que foi escrita em 13 volumes.

Quanto ao seu trabalho matemático, destacamos alguns pontos interessantes:

Embora escrita em grego, sua obra não apresenta as mesmas características dos trabalhos gregos do período - por exemplo, seu enfoque na Álgebra, incipiente na Matemática grega da época, ou, ainda, sua não-preocupação com métodos gerais.

Assim, a resolução de equações indeterminadas do tipo

$$Ax^2 + Bx + C = y^2, \text{ ou}$$

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2,$$

consistia em obter uma solução e não se preocupar com as demais. Entre as equações que estudou estão, por exemplo,

$$x^2 - 26y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 - 30y^2 = 1,$$

hoje conhecidas como equações de *Pell.*

Diofante só se interessava por soluções racionais positivas, não aceitando as negativas ou as irracionais.

Na obra de Diofante encontramos pela primeira vez o uso sistemático de símbolos algébricos. Equações algébricas são expressas por símbolos algébricos e seu tratamento é puramente analítico, desvinculado de métodos geométricos. Identidades como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, que, para *Euclides,* eram teoremas da Geometria, para Diofante eram conseqüências imediatas das propriedades algébricas das operações.

Diofante era muito hábil no manuseio algébrico. Por exemplo, para calcular dois números, sabendo que a sua soma é 20 e a soma de seus quadrados é 208, ele representava esses números por $10 \; x$ e $10 + x$ e não por x e y. Tal procedimento, em muitos casos, simplificava a resolução de um problema.

Outro problema abordado por ele: dividir um quadrado em dois quadrados, isto é, encontrar inteiros a, b e c tais que $a^2 + b^2 = c^2$, parece ter despertado a atenção de Fermat, que, ao ler a cópia do livro de Diofante, fez diversas anotações nas margens, entre elas o famoso "último teorema de Fermat".

Os problemas estudados por Diofante são problemas indeterminados que exigem soluções inteiras (ou racionais) positivas e envolvem, em geral, equações de grau superior ao primeiro. Mesmo assim, hoje em dia, equações indeterminadas do primeiro grau, com coeficientes inteiros, são chamadas equações diofantinas em homenagem ao pioneirismo de Diofante nessa área.

A título de curiosidade, reproduzimos um problema que apareceu sob forma de poema no quinto ou sexto século. Ele permite calcular quantos anos Diofante viveu:

Diofante passou 1/6 de sua vida na infância, 1/12 na juventude e mais 1/7 antes de se casar; 5 anos após seu casamento, nasceu um filho que morreu 4 anos antes do pai com a metade da idade que este tinha ao morrer.

Como escolher namorada pelos horários do trem de subúrbio

Adaptado do artigo de
Manuel Henrique C. Botelho

João amava Lúcia que amava João. Só que João além de amar Lúcia também amava Letícia e tentava namorar as duas ao mesmo tempo. Durante a semana, até que dava, mas quando chegava o sábado à noite era terrível. As duas queriam João e este não possuía o dom da presença ao mesmo tempo em dois lugares.

Assim alternadamente ou Lúcia ou Letícia ficavam sem sair com João, nos embalos de sábado à noite. HONESTO (?), João decidiu contar a Lúcia a existência de Letícia e a Letícia sobre Lúcia. Claro que houve choros e lamúrias de todos os lados. E João continuou dividido, sem saber como escolher entre as duas.

Aqui um detalhe, João morava próximo a uma estação ferroviária de um subúrbio. Para visitar Lúcia, João pegava trens que iam no sentido da direita a cada meia hora, e para visitar Letícia, João pegava trens que iam à esquerda a cada meia hora também. Quanto a horários não havia dúvidas. Trens para cada lado de meia em meia hora. Mas voltemos a dúvida existencial afetiva do nosso amigo João.

Como escolher entre Lúcia e Letícia?

A solução foi dada por Letícia que era professora de Matemática. Letícia propôs a João um critério justo, equânime, salomônico para escolher a quem ir namorar. A proposta foi: João sairia de casa sem saber com quem ir encontrar. Ao chegar na estação pegaria o primeiro trem que passasse, fosse para a direita, fosse para esquerda. Proposta aceita. João começou a usar esse critério aparentemente justo e aleatório.

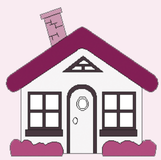
Depois de usar o critério por cerca de três meses, descobriu que visitara Letícia muito mais que Lúcia, e se a sorte quis assim ficou com Letícia e com ela se casou sem nunca haver entendido porque a sorte a privilegiara tanto.

Só nas bodas de prata do seu casamento é que Letícia contou a João a razão do mistério, de o trem ter escolhido, ela preferencialmente a concorrente. Letícia estudara os horários dos trens e verificara que os horários eram:

Letícia	*Lúcia*
8h00	8h05
8h30	8h35
9h00	9h05
9h30	9h35
TRENS P/ ESQUERDA	*TRENS P/ DIREITA.*

Desta forma, em qualquer intervalo de 30 minutos, a probabilidade de João pegar o trem que vai para a esquerda é de 25/30 e para a direita é de 5/30.

No amor como na guerra tudo vale..., até usar Matemática.

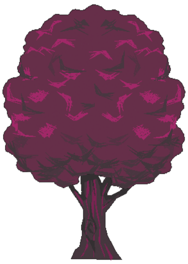


"Em cada uma de sete casas,
há sete gatos,
cada um deles come sete ratos,
cada um dos quais havia
comido sete espigas de trigo,
cada uma delas com sete
hecates (medidas de grão).
Casas, gatos, ratos, espigas e hecates,
quantos são?

Exercício para jovens estudantes do Papiro de Ahmes (1650 a.C.) Carl Boyer.

A Praça de Savassi vai continuar se chamando Diogo Vasconcelos

Adaptado do artigo de
Paulo Afonso da M. Machado



Esta é uma história inventada, mas o modo mencionado de se calcular o quórum de 3/5 é verdadeiro, não apenas na Câmara de Vereadores de Belo Horizonte, mas na própria Assembléia Legislativa de Minas Gerais.

Na comemoração dos 100 anos de Belo Horizonte saíram inúmeras publicações sobre a história de nossa cidade. Folheando uma dessas publicações, vim a saber quem foi Diogo Vasconcelos, que dá nome à conhecidíssima Praça da Savassi.

Durante os debates para a mudança da capital, Vasconcelos foi um baluarte na defesa da sua manutenção em Ouro Preto. Homem muito rico, usou sua influência para tentar convencer os deputados estaduais a votarem contrariamente à mudança. Perdeu. Entretanto, ele percebeu que, afinal de contas, uma nova capital poderia ser fonte de rendimento para um homem abonado como ele. Transferiu-se para Belo Horizonte e passou a emprestar dinheiro aos funcionários públicos que receberam lotes e estavam sem dinheiro para construir suas moradias.

Diogo Vasconcelos teve em Belo Horizonte a mesma influência que tinha em Ouro Preto. Tanto isso é verdade que conseguiu que seu nome fosse dado a uma importante praça de Belo Horizonte: a Praça da Savassi, ou melhor, Praça Diogo Vasconcelos, pois Savassi é apenas apelido.

Penso que, não obstante Diogo Vasconcelos ter sido um dos primeiros moradores de Belo Horizonte, manter seu nome numa praça que é conhecida nacionalmente por outro nome é uma atitude incoerente. Não foi o que aconteceu com a Praça 21 de Abril, pois, após a colocação da estátua de Tiradentes, o povo passou a chamá-la de Praça Tiradentes, nome que depois foi oficializado.

Outro exemplo é o da Rua do Amendoim. Por uma ilusão de ótica, a rua tem um declive que parece um aclive. Se você desligar o seu carro e baixar o freio de mão, terá a impressão de que o carro está subindo, apesar de desligado. O povo não tardou a apelidar essa via de Rua do Amendoim, por motivos óbvios. A Câmara Municipal não tardou em oficializar o nome popular.

E a Praça da Savassi, por que continua a se chamar Diogo de Vasconcelos? Procurei um vereador e convenci-o a apresentar um projeto oficializando o nome de Praça da Savassi. Apresentado o projeto, logo foi parar nos jornais. O debate ganhou os pontos dos ônibus, as mesas dos botequins, os quarteirões fechados da Praça Sete (opa!, quase me esqueci de que o nome oficial é Praça 7 de Setembro).

No dia da votação, lá estava eu na Câmara de Vereadores. Como o projeto visava a modificar a Lei Orgânica do Município, era necessário o voto favorável de 3/5 dos vereadores. Acompanhei a votação com lápis e papel na mão. Votaram a favor do projeto 23 vereadores. Como no total são 37, o projeto estava aprovado!

– Vencemos, vencemos – disse para o meu amigo vereador. Mas ele balançou a cabeça negativamente e me explicou que o quórum de 3/5 correspondia a 24 vereadores.

Retirando a calculadora do bolso, disse-lhe que não: 3/5 de 37 é igual a 22,2. Ora, 23 é maior que 22,2. O projeto estava aprovado!

Com minha argumentação, consegui confundir o vereador. Acostumado a considerar o quórum de 3/5 de 37 como 24, ele nunca o havia questionado. Para tirar a dúvida, pegou o regimento interno da Câmara, que diz o seguinte:

"O *quorum* de será calculado da seguinte forma:

(a) se o número de vereadores for múltiplo de 5, esse número será dividido por 5 e multiplicado por 3;

(b) se o número de vereadores não for múltiplo de 5, serão somadas tantas unidades quantas necessárias para se obter um múltiplo de 5 e, em seguida, divide-se esse número por 5 e multiplica-se por 3".

Não concordei. Afinal de contas, a lei não pode mudar uma regra matemática. E, para provar que o regimento estava errado, tomei de um lápis e expliquei:

Vamos supor um número, V, de vereadores, tal que V seja uma unidade a mais que um múltiplo de 5. Podemos dizer que $V = 5n + 1$, sendo n inteiro. 3/5 de V será igual a $3n + \frac{3}{5}$.

Portanto, o primeiro número inteiro imediatamente superior será $3n + 1$. Se formos obedecer ao regimento, teremos que somar quatro unidades a V, obtendo $5n + 5$, que dividido por 5 daria $n + 1$ que multiplicado por 3 daria um quórum de $3n + 3$, portanto duas unidades a mais que o necessário.

Se raciocinarmos de forma análoga com $V = 5n + 2$, que é o caso da composição atual da Câmara de Vereadores de Belo Horizonte, teremos $\frac{3}{5}V = 3n + \frac{6}{5}$, o que nos indica que $3n + 2$ deveria ser o quórum, e não $3n + 3$, como se calcula pelo regimento.

Para $V = 5n + 3$, teremos o mesmo caso. O quórum deveria ser $3n + 2$ e não $3n + 3$. O único caso em que o regimento bate com a Matemática é quando $V = 5n + 4$, com *quorum* de $3n + 3$.

Não adiantou minha argumentação. O regimento teria que ser modificado, mas não valeria para aquela votação, que já havia se encerrado. Portanto, meus caros conterrâneos, acostumem-se a chamar a Praça da Savassi de Diogo Vasconcelos, pois é esse seu verdadeiro nome.

Conversão de unidades

Adaptado do artigo de
Manuel Henrique C. Botelho

Fui assessor de uma empresa estatal que precisava desapropriar enorme área rural. Depois de muito discutir com os sitiantes e pequenos fazendeiros que iam ter suas terras desapropriadas, chegamos a um consenso de valor para a desapropriação amigável, algo próximo de R$ 24 000,00 por alqueire. Fiquei incumbido de preparar o contrato. Ao fazê-lo, lembrei-me do meu juramento ao professor de Física, Professor Hermann, e ao Engº Max Lothar Hess, meu primeiro chefe (ambos de formação germânica), de nunca, mas nunca mesmo, trair o sistema métrico em minha vida profissional. Como o alqueire paulista tem 24 000 m², fiz a conversão, e o texto do contrato para ser assinado dizia que o valor da desapropriação seria de R$1,00 o m².

Não sei o que aconteceu por causa disso, pois todos os proprietários das fazendolas e dos sítios que tinham acertado o valor, ao lerem o texto do contrato, acharam um absurdo vender as terras que tinham seu suor por R$1,00 o m². Outra coisa muito diferente seria receber os combinados R$ 24 000,00 por alqueire.

Aí descobri que acima da Matemática e Física existe uma coisa chamada "aspecto humano", fato que, em geral, nós, engenheiros, esquecemos.

O loteamento de 1010 km². O conflito rural e urbano

Faz muitos anos. Um jovem engenheiro de origem interiorana fez parte de uma comissão de licitação para escolher uma firma que iria fazer desenhos de loteamentos da cidade de São Paulo, no esforço de regularizar loteamentos clandestinos. Para contratar a firma de desenhos, incluíu-se no edital em preparação uma série de exigências de praxe, como capital social, prova que o titular da firma estava em dia com o serviço militar, etc. Na hora de fixar a exigência "experiência anterior", perguntou-se ao engenheiro qual área de desenho de loteamentos a firma deveria já ter executado. O pobre do engenheiro, sem nenhuma experiência em "desenho de loteamentos", pensou e chutou um número redondo: –10 km^2.

Por que 10? Nenhuma razão, mas pelo menos atendia ao sistema decimal. E o edital saiu com essa exigência.

Mal saiu, choveram reclamações de protecionismo e direcionamento da concorrência. Nenhuma firma dizia ter feito nada próximo a essa área de desenho. Talvez fosse uma malandragem da comissão de concorrência.

Acuado pelas acusações, o jovem engenheiro, então, imaginou que uma área de 10 km^2 é algo como um quadrado de lado 3,1 km e colocou no mapa da cidade de São Paulo um quadrado com essa medida, na escala do mapa, com um dos vértices no centro da cidade. A área resultante era simplesmente um monstro. Aí o engenheiro lembrou que, tendo nascido e sido criado no interior, três quilômetros na área rural é uma distância mínima, mas em uma área urbana é uma grandiosidade. O velho hábito de fumar cachimbo deixa a boca torta....

O edital foi revisto e a nova exigência caiu para 0,5 km^2, algo bem mais razoável.

Você sabia?

*Q*ue a célebre igualdade $e^{i\pi} + 1 = 0$, que contém os 5 números mais significativos da Matemática, mereceu de vários matemáticos frases apaixonadas?

Veja algumas:

"... esta mais surpreendente jóia..., a mais notável fórmula da Matemática."

(*R. Feynman*, prêmio Nobel de Física)

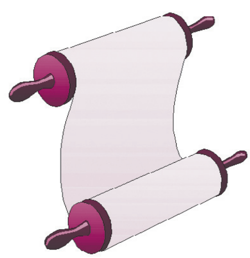
"Elegante, concisa e cheia de significação..., ela interessa tanto ao místico quanto ao cientista, ao filósofo, ao matemático."

(*E. Kasner* e *J. Newman*, autores do *best seller Matemática e Imaginação*.)

"Cavalheiros, isso é certamente verdade, é absolutamente paradoxal; não podemos entendê-lo, e não sabemos o que significa, mas provamo-lo e, portanto, sabemos que deve ser a verdade."

(*Benjamin Pierce*, eminente matemático da Universidade de Harvard no século XIX, após deduzir a fórmula em uma conferência.)

"O desenvolvimento das séries de potências complexas... revela a conexão entre funções trigonométricas e a função exponencial... e (esta conexão) nunca teria sido descoberta sem o uso de números complexos. Como subproduto desta relação, nós obtemos uma conexão inesperada entre os números e, i e π: $e^{i\pi} + 1 = 0$."



(*Michael Spivak*, autor de um excelente livro de Cálculo.)

Um dia inesquecível na vida de Gauss

Adaptado do artigo de
Jesús A. Pérez Sánchez

Ilustração 15.1: Carl Friedrich Gauss - 1777-1855 (Mary Evans Picture Library)

O dia 29 de março de 1796 foi crucial na vida de Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Faltava cerca de um mês para o seu 19º aniversário e ele estava para ingressar na Universidade de Göttingen, sem saber ainda se a sua escolha seria a Filologia ou a Matemática. Nesse célebre dia, o jovem Gauss (que viria a ser chamado o Príncipe dos Matemáticos) encontrou uma bela solução para um velho problema de Geometria. Após essa espetacular façanha ficou tão entusiasmado que renunciou à sua possível intenção de ser filologista e resolveu dedicar sua vida à Matemática e suas aplicações. Mas qual foi o problema resolvido por Gauss naquela ocasião?

Vejamos um pouco de história: Durante mais de 2000 anos o problema de dividir uma circunferência em n partes iguais, usando somente régua e compasso, permaneceu como foi deixado pelos gregos. Vamos dar uma idéia do problema: Se uma circunferência é dividida em n partes iguais, unindo os sucessivos pontos de divisão por cordas, obtemos um polígono regular de n lados. Sabemos que é fácil construir, somente com régua e compasso, um polígono regular de $2n$ lados a partir de um polígono regular de n lados. Os gregos sabiam construir um polígono regular de 3 lados e também um polígono regular de 5 lados (nesse caso aparece o problema do segmento áureo ou dividir um segmento em meia e extrema razão).

Além disso provaram que se um polígono regular de n lados e outro de m lados, com m e n primos entre si, podem ser construídos (com régua e compasso), então pode-se construir um polígono regular de mn lados.

Em resumo: Os gregos sabiam construir, com régua e compasso, um polígono regular de n lados, se n fosse um número natural da forma:

$$n = 2^m \times 3^r \times 5^s \quad m \geq 0,\ r \text{ e } s \text{ inteiros iguais a 0 ou 1.}$$

O passo seguinte era construir, com os instrumentos citados, polígonos regulares de 7, 9, 11 e 13 lados e, embora o problema tenha sido estudado por grandes matemáticos como Fermat e Euler, nenhum progresso fora feito. Não chegaram a encontrar um método, porque tais construções são impossíveis, como foi provado por aquele garoto alemão que estava dividido entre a Matemática e a Filologia.

Gauss provou o seguinte:

Um polígono regular de n lados é construtível se, e somente se, n é um número natural da forma

$$n = 2^s \times p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_r,$$

com s inteiro não negativo, e cada p_i primo de Fermat, isto é,

$$p_i = 2^{2^{k_i}} + 1,$$

com k_i inteiro não negativo. Além disso, $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$.

Assim ficou provado pela primeira vez que um polígono regular de 17 lados é construtível com régua e compasso, pois $17 = 2^{2^2} + 1$.

Por sinal, como curiosidade histórica, podemos assinalar que Fermat (1601-1665) conjeturou que todo número da forma $2^{2^k} + 1$, com k inteiro não negativo, é primo. De fato, para $k = 0, 1, 2, 3, 4$, obtemos, respectivamente, 3, 5, 17, 257, 65 537, que são primos; mas Euler (1707-1783) provou que $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \times 6\,700\,417$ (o 5º número de Fermat), logo, não é primo.

Gauss sempre lembrou com singular orgulho a grande proeza daquele 29 de março. Após sua morte foi erigida, em Göttingen, uma estátua de Gauss em bronze e, como homenagem muito apropriada, seu pedestal tem a forma de um polígono regular de 17 lados.

Símbolos e notações matemáticas

Símbolos em Matemática são como sal numa sopa:
se colocar demais, estraga, se colocar de menos, fica sem gosto.

Até o século XVI, expressões matemáticas eram escritas de forma excessivamente verbal ou retórica. Por exemplo, em 1591, Viète, para representar a equação $5A^2 + 9A - 5 = 0$, escrevia em bom latim:

5 *in* A *quad et* 9 *in* A *planu minus* 5 *aequatur* 0.

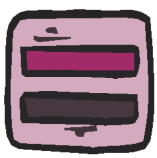
No século XVI a linguagem simbólica ganhou um grande impulso. William Oughtred (1574-1660), em três de seus livros, usou mais de 150 símbolos, muitos criados por ele. Destes, porém, poucos permanecem em uso.

A implementação de alguns símbolos usados hoje em dia foi acontecendo naturalmente ao longo de décadas ou séculos, sob a égide da praticidade e do pragmatismo. Pouco pode se afirmar com precisão sobre essa evolução. Outros símbolos, graças ao prestígio de seus criadores, tiveram aceitação imediata. Como exemplo desses últimos podemos citar alguns símbolos criados por Leonhard Euler (1707-1783):

- $f(x)$, para indicar "função de x" ;
- $\sum$, " somatória" (o símbolo é a letra maiúscula grega, *sigma*, que corresponde ao nosso S);
- i, "unidade imaginária", representada também por $\sqrt{-1}$;
- e, base dos logaritmos neperianos, igual a 2,718 .... A letra π (=3,14159...), embora usada por William Jones em 1706, teve o seu emprego consagrado por Euler.

Símbolos de operações

Símbolo +



Uma explicação razoável é que, até então, a adição de dois números, por exemplo 3 + 2, era representada por 3 ***et*** 2.

Com o passar dos anos a conjunção latina ***et*** foi sincopada para ***t***, da qual se originou, no fim do século XV, o sinal +.

Símbolo –

Apareceu pela primeira vez em 1481, em um manuscrito alemão. Na forma impressa, apareceu pela primeira vez em 1498. Há várias hipóteses, nenhuma confirmada, quanto à origem do símbolo.

Símbolo ×

O primeiro uso do símbolo × para indicar multiplicação deve-se a William Oughtred (1618). Leibniz temia que × pudesse ser confundido com *x*. Em 1698 ele sugeriu o uso do "ponto" como sinal de multiplicação.

Símbolo ÷

No século XII, Fibonacci usava, para a divisão, a notação a/b, já conhecida pelos árabes. A notação $a:b$ é atribuída a Leibniz (1648). O símbolo ÷ foi usado pela primeira vez por J. H. Rahn em 1659.

Símbolos $<$ *e* $>$

Foram introduzidos pelo inglês Thomas Harriot (1631 – numa publicação póstuma) com o significado atual. Porém os símbolos $\geq$ e $\leq$ foram introduzidos mais tarde, em 1734, pelo francês Pierre Bouger.

Símbolo $\sqrt{\ }$

Apareceu impresso, pela primeira vez, em 1525 no livro *Die Coss* (1525) do matemático C. Rudolff. O símbolo pode ter sido escolhido pela sua semelhança com a primeira letra da palavra latina *radix* (raiz). Uma outra hipótese é que ele seja uma evolução do símbolo usado em manuscritos mais antigos para designar uma raiz.

Símbolo =

Este sinal foi introduzido por Robert Recorde (~1557)., *... bicause noe.2.thynges, can be moare equalle...*(... porque nenhum par de coisas pode ser mais igual (do que um par de paralelas)).

Capítulo 6

Problemas

2 é igual a 3?

Provar que 2 = 3 e mostrar o erro.

Solução

Há várias "demonstrações". Uma bem antiga é:

$4 - 10 = 9 - 15$; some 25/4 a ambos os membros:

$4 - 10 + 25/4 = 9 - 15 + 25/4$; cada membro é um quadrado perfeito:

$(2 - 5/2)^2 = (3 - 5/2)^2$; extraia a raiz quadrada:

$2 - 5/2 = 3 - 5/2$ e, daí, $2 = 3$.

O erro

Na verdade, $\sqrt{a^2} = |a|$ para qualquer número real *a*, isto é, a raiz quadrada de um número real positivo é por definição um outro número real ***positivo***, cujo quadrado é igual ao número inicial.

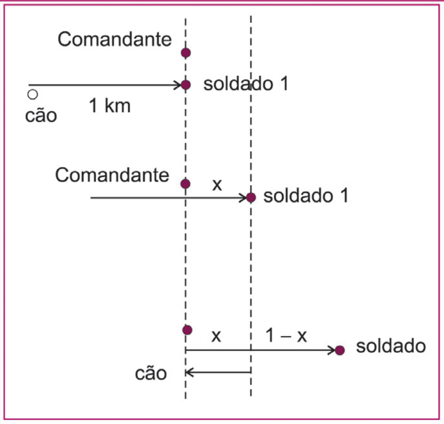
Por exemplo, $\sqrt{(-2)^2}$ é igual a 2 e não -2; $\sqrt{4} = 2$ e não ± 2.

O mascote

Uma coluna de soldados, com 1 km de comprimento, está marchando em linha reta, com velocidade constante, desfilando diante do comandante, que permanece parado. No exato momento em que o primeiro homem passa pelo comandante, um cachorro que estava ao lado do último homem sai correndo em direção ao primeiro, também com velocidade constante. Ao chegar onde ele está, começa a voltar (suponhamos que instantaneamente) em direção ao último. Quando chega no último novamente, ele está passando em frente ao comandante. Qual a distância percorrida pelo cão?

Solução

Sejam v_c e v_s, respectivamente, as velocidades do cachorro e dos soldados. Lembrando que "espaço = velocidade × tempo", temos:



O cachorro sai correndo e os soldados marchando. Enquanto o cachorro anda $1 + x$, o primeiro soldado anda x.

$$\frac{1+x}{v_c} = \frac{x}{v_s} \Rightarrow \frac{1+x}{x} = \frac{v_c}{v_s} \quad (1)$$

Os soldados seguem e, o cachorro volta. Enquanto o cachorro anda x, o soldado 1 anda $1 - x$.

$$\frac{x}{v_c} = \frac{1-x}{v_s} \Rightarrow \frac{x}{1-x} = \frac{v_c}{v_s} \quad (2)$$

De (1) e (2):

$$\frac{1+x}{x} = \frac{x}{1-x}, \text{ de onde } 2x^2 = 1 \text{ ou } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, o cachorro andou $1 + 2x = 1 + \sqrt{2}$ km.

Uma mosca e três pontos de vista

Uma colega, do Rio de Janeiro, RJ, conta-nos uma história dos seus tempos do ensino médio, mostrando as diferentes soluções dadas para um conhecido problema que seu pai lhe propôs.

Mais tarde ela encontrou esse mesmo problema, classificado como “difícil”, na Seção Superdivertido da revista *Superinteressante*. Trata-se do seguinte problema:

Dois carros estão em rota de colisão, viajando um em direção ao outro, cada um a 60 km/h. Inicialmente estavam afastados a uma distância de 60 km. Uma mosca frenética voa a 120 km/h entre os carros sem parar, de forma que, encostando em um carro, inverta o sentido do vôo. Qual a distância efetivamente percorrida pela mosca até o momento da colisão?

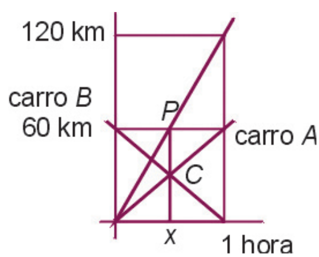
Nossa colega diz que sua solução foi considerar cada percurso da mosca, de um carro, que ela chamou de A para o carro B, em seguida de B para A e assim por diante. Partindo de A, ela considerou a velocidade relativa da mosca em relação ao carro B (velocidade de B + velocidade da mosca) para calcular o tempo em que a mosca encontraria o carro B: distância/velocidade = 60/(120 + 60) = 1/3 de hora, que significa que a mosca percorreu 120/3 = 40 km, até encontrar o carro B e, nesse instante, os carros estavam já a uma distância de 60 – 2 × 60/3 = 20 km um do outro.

A mosca irá de B até A num intervalo de tempo igual a 20/180 = 1/9 de hora, tendo andado 120/9 = 40/3 km, nesse percurso. Não foi difícil desconfiar que essas distâncias formavam uma PG de primeiro termo igual a 40 e de razão igual a 1/3, o que, no limite, daria uma soma igual a 40/(1 – 1/3) = 60 km.

O pai de nossa colega, depois de assistir a esse esforço da filha, comentou:

"Bem se vê que você é matemática, bastava ter calculado o intervalo de tempo que os carros levaram até a colisão, que é de 60/(60 + 60) = 1/2 hora, e então a mosca, a 120 quilômetros por hora, terá percorrido 60 km!".

A carta prossegue "Meu pai, que é físico, me contou também que um colega seu, engenheiro e que fazia muito bem gráficos a mão livre, assim que soube do problema fez o seguinte desenho e achou a mesma resposta:



No gráfico, C é o ponto de colisão entre os carros, que ocorre no tempo x, e P a posição da mosca no tempo x, o que dá os 60km percorridos."

A colega termina a carta com o seguinte comentário: "Existem várias formas de se resolver o mesmo problema...cada pessoa procura pela solução mais adequada com sua personalidade. Não foi à toa que eu escolhi fazer Matemática, meu pai, Física e o colega de meu pai Engenharia."

Nota

Essa é uma boa observação para o professor de Matemática, que, além de conhecer as soluções que mais lhe agradam, precisa também conhecer, respeitar e saber analisar as soluções de seus alunos, comparando as vantagens e desvantagens de cada uma!

No caso citado, por exemplo, a solução "matemática" envolve uma misteriosa passagem ao limite, enquanto a solução "engenheira" mistura, perigosamente, gráficos em que as variáveis não são as mesmas.

Repare só: o primeiro eixo significa o tempo contado a partir do instante em que os carros estavam a 60 km um do outro, mas o segundo eixo indica variáveis diferentes– nas retas relativas aos dois carros, essa variável é o espaço percorrido, medido em relação ao ponto em que estava o carro A no instante $t = 0$; já na reta relativa ao movimento da mosca, esse eixo está significando espaço percorrido a partir do instante 0.

No caso do carro A, o segundo eixo pode significar uma coisa ou outra. Por isso, o aparente ponto de encontro entre a mosca e o carro B, que aparece no gráfico num instante entre 0 e x, não tem esse significado; por outro lado, no instante x, os dois carros e a mosca estão idealmente no mesmo ponto, ao contrário do que o gráfico sugere.

Felizmente, na ocasião, o engenheiro fez a leitura certa, tirando os dados que interessavam.

Talvez por ser engenheiro!

Por que não dá certo?

Resolvi a equação cotg x – sen2x = 0 de dois modos, e as respostas não bateram:

1) $\dfrac{1}{tgx} = \dfrac{2tgx}{1+tg^2x} \Rightarrow tg^2x = 1 \Rightarrow tgx = \pm 1 \Rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$

2) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - 2\operatorname{sen} x \cos x = 0 \Rightarrow \cos x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos x = 0 \Rightarrow$

$$\cos x(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z.$$

Observei que $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ é solução da equação dada. Por que essa solução não apareceu na primeira resolução?

Solução

Na primeira resolução, no lugar de cotg x foi colocado $\dfrac{1}{tgx}$. Acontece que $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$ apenas para os valores de x para os quais *ambas* as funções estão definidas, ou seja, para valores de x diferentes de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z.$

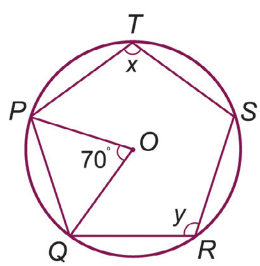
Também $sen 2x = \dfrac{2tgx}{1 + tg^2 x}$ somente se $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi.$

Por isso, na primeira resolução será necessário examinar, separadamente, o que acontece com os múltiplos (inteiros) de $\pi/2$, o que fará aparecer a solução aparentemente perdida.

Pentágono

No pentágono desenhado abaixo, considere x e y as medidas dos ângulos $P\hat{T}S$ e $S\hat{R}Q$.

Quanto vale $x + y$?



Solução

Tanto quanto são ângulos inscritos na circunferência, de modo que, pelo teorema do ângulo inscrito, temos

$$x = \frac{1}{2} arco(\widehat{SRP}), \text{ e } y = \frac{1}{2} arco(\widehat{QPS})$$

Como $arco(S\hat{R}P) = arco(S\hat{R}Q) + 70^\circ$, segue que

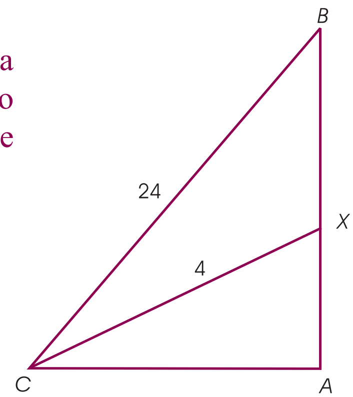
$$x + y = \frac{1}{2} arco(S\hat{R}P) + \frac{1}{2} arco(Q\hat{P}S) =$$

$$\frac{1}{2}[arco(S\hat{R}P) + 70^\circ] + \frac{1}{2} arco(Q\hat{P}S) = 35^\circ + \frac{1}{2}[arco(S\hat{R}Q) + arco(Q\hat{P}S)] =$$

$$35^\circ + \frac{1}{2} \cdot 360^\circ + 180^\circ = 215^\circ.$$

Triângulo

Seja ABC um triângulo retângulo em A, CX a bissetriz do ângulo, sendo X um ponto do lado AB. Se $CX = 4$ cm e $BC = 24$ cm, quanto mede AC?



Solução

No ΔAXC temos $\cos\alpha = \dfrac{AC}{4}$ e no ΔABC temos $\cos 2\alpha = \dfrac{AC}{24}$.

Logo, $6\cos 2\alpha = \cos\alpha$ ou

$$6(\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha) = 6(\cos^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha) = 6(2\cos^2\alpha - 1) = \cos\alpha.$$

Fazendo $\cos\alpha = t$, obtemos a equação $12t^2 - t - 6 = 0$, que tem raízes $t = 3/4$ e $t = -2/3$.

Como α é um ângulo de um triângulo retângulo, temos $\cos\alpha > 0$, e $\cos\alpha = \dfrac{AC}{4} = \dfrac{3}{4}$ ou $AC = 3$.

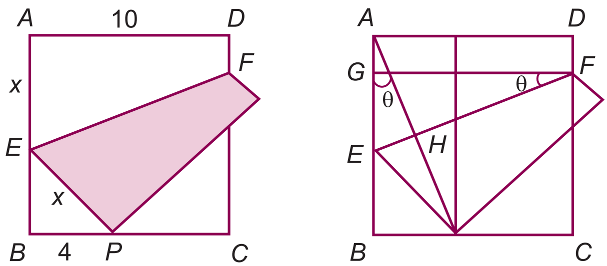
De um Vestibular em uma universidade do Japão

Um quadrado $ABCD$ de 10 cm de lado é dobrado como na figura, de forma que $BP = 4$ cm. Calcule AE e EF.

Solução

Por construção, $AE = EP$.

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo EBP, obtém-se $EP = 5,8$ cm, donde $AE = 5,8$ cm.



Do fato de o triângulo AEP ser isósceles, e de $AH = HP$ (devido à dobradura), temos que EH é a mediana e também a altura do triângulo.

Logo, $EF \perp AP$.

Traçando FG paralelo a AD, observamos que os triângulos retângulos ABP e FGE são congruentes, pois ambos têm um cateto de 10 cm e $P\hat{A}B = G\hat{F}E$, por serem ângulos de lados respectivamente perpendiculares.

Então, $EF = AP = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \approx 10,77.$

Quantos existem?

Quantos triângulos obtusângulos existem cujos lados são três números inteiros consecutivos?

Solução

Supondo que as medidas dos lados sejam $a-1$, a e $a+1$, é necessário que

$$a+1 < a+a-1, \text{ isto é, } a > 2.$$

A lei dos cossenos nos diz que nos triângulos obtusângulos

$$(a+1)^2 > a^2 + (a-1)^2.$$

Efetuando os cálculos, obtém-se $a < 4$.

Portanto, $a = 3$ e os outros lados medem 2 e 4.

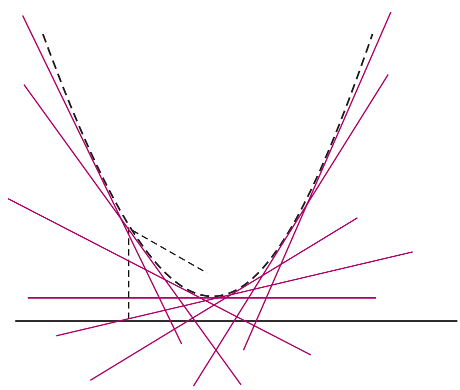
Construindo uma parábola através de dobraduras

Sejam d uma reta e F um ponto fora de d. Para cada ponto seja t a reta mediatriz do segmento $\overline{FR}$. Mostre que t é tangente à parábola de foco F e diretriz d.

Solução

Numa folha de papel fino (papel manteiga, por exemplo) com cerca de 30 cm por 22 cm, trace uma reta e marque um ponto fora dela. A seguir dobre a folha de modo que o ponto considerado se sobreponha a um ponto qualquer da reta.

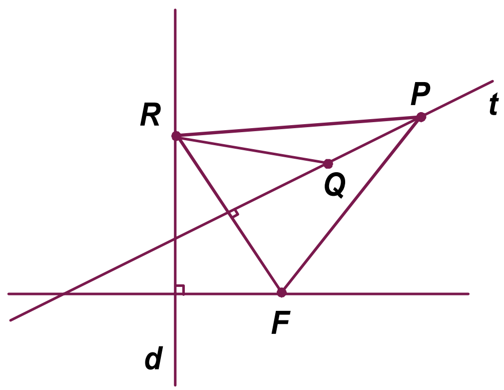
Finalmente vinque a dobra para que esta fique gravada no papel como uma linha visível. Repita esta operação muitas vezes, quantas a sua paciência permitir. Ao observar a folha aberta contra uma superfície escura surgirá uma parábola lindamente emoldurada por envoltórias de tangentes.



Podemos formular matematicamente a atividade anteriormente proposta.

Entenderemos a reta tangente a uma parábola como sendo a reta que intercepta a parábola num único ponto (chamado ponto de tangência) e que não é paralela ao seu eixo. Os leitores familiares com a noção de derivada de uma função podem mostrar a equivalência entre a definição acima e a usual apresentada nos cursos de Cálculo.

Como $F \notin d$, segue que a reta t, mediatriz de $\overline{FR}$ nunca é perpendicular à reta d, qualquer que seja a escolha de $R \in d$. Em outras palavras, t não é paralela ao eixo da parábola. Traçemos, a partir de R, a perpendicular à reta d, e seja P a interseção dessa perpendicular com t.



Lembrando que os pontos de t são eqüidistantes de F e R, temos $\text{dist}(P, d) = PR = PF$, ou seja, P pertence à parábola $\mathbf{P}$ de foco F e diretriz d.

eixo da parábola

Seja agora $Q \in t$, Q distinto de P. Mostraremos que $Q \notin \mathbf{P}$, de modo que t intercepte $\mathbf{P}$ apenas no ponto P.

Como Q é distinto de P, temos que $\overline{QR}$ não é perpendicular à reta d e, portanto, $QR > \text{dist}(Q, d)$. Por outro lado, $QF = QR$, pois $Q \in t$.

Logo, $QF > \text{dist}(Q, d)$, isto é, $Q \notin \mathbf{P}$.

Temos assim provado que t é tangente à parábola $\mathbf{P}$ no ponto P.

Equação

Resolver a equação $x^2 + \sqrt{x} - 18 = 0.$

Solução Gráfica

Pode-se perceber que $x = 4$ é uma solução dessa equação. Resta saber se existe alguma outra solução.

Como a equação também pode ser escrita $x^2 - 18 = -\sqrt{x}$, podemos olhar para os gráficos das funções $y = x^2 - 18$ e $y = -\sqrt{x}$, e procurar os pontos de encontro.

Desse modo verifica-se que há apenas uma solução (real) da equação.

Logo, a solução encontrada é única.

Solução Algébrica

$$x^2 + \sqrt{x} - 16 - 2 = 0$$

$$x^2 - 16 = 2 - \sqrt{x}$$

$$(x-4)(x+4) = 2 - \sqrt{x}$$

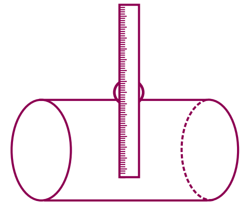
$$(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 2)(x+4) = 2 - \sqrt{x}$$

Então $2 - \sqrt{x} = \sqrt{x} - 2 = 0$, que implica $x = 4$, ou $(\sqrt{x} + 2)(x+4) = -1$. Mas como $x \geq 0$, logo, $(\sqrt{x} + 2)(x+4) \geq 0$, implicando que $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = -2 \end{cases}$ não tem solução real.

Sendo assim, a única solução real é $x = 4$.

O problema do tanque de combustível

Como os donos dos postos de gasolina medem a quantidade de combustível que possuem em seus depósitos enterrados? É comum um



dono de posto medir a quantidade de combustível dos seus tanques com uma régua graduada, colocada verticalmente na boca do tanque enterrado.

Se o depósito enterrado for cilíndrico (a grande maioria o é):

(a) existe uma régua-padrão graduada para qualquer medida de tanque (caso variem altura e raio da base)?

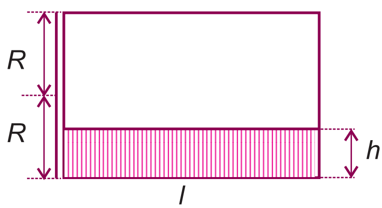
ou,

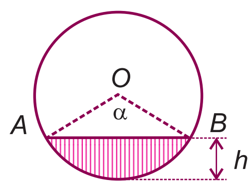
(b) para cada tanque existe uma régua graduada que acompanha o tanque?

Solução

Fica claro que a dificuldade está em calcular a área de um segmento circular. É evidente que a área que queremos calcular é a diferença entre a área do setor AOB e a área do triângulo AOB.

Para calcular a área do setor, seja α o ângulo central $\overset{\frown}{AOB}$. Se o setor fosse o círculo todo, a área seria πR^2. Portanto, se para o ângulo 2π a área é πR^2, para um ângulo α qualquer, por regra de três simples, chegamos a $\alpha R^2/2$.





Como a área do triângulo AOB é $\frac{1}{2} OA \times OS \times \operatorname{sen}\alpha$, ou seja, $\frac{1}{2} R^2 \times \operatorname{sen}\alpha$, chegamos, para a área da seção transversal do líquido, ao valor

$$A = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha)$$

O volume do líquido seria então $V = \frac{R^2}{2}(\alpha - \operatorname{sen}\alpha) l$

Parecia que o problema estava resolvido. Lembramos, então, que α não é conhecido. O que se pode medir com facilidade é *h.* Mas, com um pouco de trigonometria, foi fácil chegar a

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{R-h}{R} \quad \text{e, daí,} \quad \alpha = 2\arccos\left(1-\frac{h}{R}\right).$$

Logo, a resposta da primeira pergunta (a) é NÃO. O volume do líquido no tanque depende não só de *h,* mas das dimensões do reservatório.

Para a pergunta (b), se tivermos apenas uma régua graduada em centímetros, as fórmulas anteriores permitem um rápido cálculo do volume.

Por exemplo, se o tanque tiver 2 m de diâmetro e 4 m de comprimento, suponha que foi encontrado $h = 60$ cm.

Temos, então

$$\alpha = 2\arccos\left(1-\frac{0,6}{1}\right) \approx 2,1386 \quad \text{e}$$

$V \approx 3,1707 \text{ m}^3$ ou, aproximadamente, 3170 litros.

Resolva a equação $(x + 1)^6 = x^6$.

Solução

Vamos utilizar, na solução, as igualdades seguintes, bastante conhecidas:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \quad \text{e} \quad a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

$$\begin{aligned}(x + 1)^6 - x^6 &= [(x+1)^3 - x^3][(x + 1)^3 + x^3]\\ &= (3x^2 + 3x + 1)[(x + 1)^3 + x^3]\\ &= (3x^2 + 3x + 1)(2x + 1)[(x + 1)^2 - x(x + 1) + x^2]\\ &= (3x^2 + 3x + 1)(2x + 1)(x^2 + x + 1).\end{aligned}$$

Segue-se então que

$(x + 1)^6 - x^6 = (2x + 1)(x^2 + x + 1)(3x^2 + 3x + 1) = 0$ se, e somente se, $2x+1=0$ ou $x^2+x+1=0$ ou $3x^2+3x+1=0$.

Logo, o conjunto solução da equação $(x+1)^6 = x^6$ é

$$\left\{-\frac{1}{2}, \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3\pm i\sqrt{3}}{6}\right\}.$$

Equação do 2º grau

Dada uma equação do segundo grau, com coeficientes inteiros, mostre que o seu discriminante não pode ser igual a 23.

Solução

Seja $ax^2+bx+c=0$, com a, b e c inteiros e $a \neq 0$.

Suponhamos $b^2-4ac=23$.

Segue-se que $b^2=4ac+23$ é ímpar e portanto b é ímpar.

Se b é ímpar, $b-1$ e $b+1$ são pares, e portanto $b^2-1=(b+1)(b-1)$ é múltiplo de 4.

Mas $b^2-1=4ac+22$ e, como 22 não é múltiplo de 4, segue-se que b^2-4ac não pode ser igual a 23.

Múltiplos

Escreva o número 512 como uma soma de dois números inteiros positivos, um dos quais é múltiplo de 11, e o outro é múltiplo de 13. Seria possível resolver o problema se fosse solicitado que um fosse múltiplo de 15 e o outro múltiplo de 21? Justifique sua resposta.

Solução

Supondo que existam inteiros positivos, a e b tais que

$$512 = 11a + 13b = 11(a+b) + 2b,$$

concluímos que $a+b$ é um número par.

Além disso, $512 - 2b = 11(a + b)$ e, então, não é difícil verificar que o maior valor possível para $512 - 2b$ é 506, e o menor é 440, o que implica $40 \le a + b \le 46$.

Resultam as possibilidades:

$a = 43$ e $b = 3$; $a = 30$ e $b = 14$; $a = 17$ e $b = 25$; $a = 4$ e $b = 36$.

A resposta para a pergunta: "Seria possível resolver o problema, se fosse solicitado que um fosse múltiplo de 15, e o outro, múltiplo de 21?" é:

Não existem a, b inteiros positivos tais que

$$512 = 15a + 21b = 3(5a + 7b),$$

pois 512 não é divisível por 3.

Sistemas

Sejam x e y inteiros positivos tais que

$$xy + x + y = 71 \text{ e } x^2y + xy^2 = 880.$$

Determine $x^2 + y^2$.

Solução

De $\begin{cases} xy(x+y) = 880 \\ x + y = 71 - xy \end{cases}$ temos $(xy)^2 - 71xy + 880 = 0$,

logo $xy = 55$ ou $xy = 16$.

Para $xy = 16$ temos $x + y = 55$; porém não existem inteiros x e y que verifiquem essas duas equações.

Para $xy = 15$ temos $x + y = 16$; logo x e y são as raízes 11 e 5 da equação $\lambda^2 - 16\lambda + 55 = 0$.

Assim, $x^2 + y^2 = 11^2 + 5^2 = 146$.

Equação

Mostre que quaisquer que sejam os números inteiros $a, b, c, d, e,$ a equação

$$x^7 + 2x^6 + 3x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

não pode ter todas as raízes reais.

Solução

Sejam $r_1, r_2, \ldots, r_7$ as sete raízes da equação.

Temos então:

$$r_1 + r_2 + \ldots + r_7 = -2 \quad \text{e}$$

$$r_1 r_2 + r_1 r_3 + \ldots + r_6 r_7 = 3.$$

Segue-se que $r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_7^2 + 6 = 4,$ e portanto

$\sum_1^7 r_i^2 = -2,$ o que mostra que nem todas as raízes podem ser reais.

Determinante

Mostre que o determinante de Vandermond

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix},$$

com a, b, c e d inteiros, é múltiplo de 12.

Solução

Considere D o valor do determinante acima.

Separando os números a, b, c e d pela sua paridade, temos 5 casos a considerar:

os quatro números a, b, c e d são pares;

três deles são pares, e um é ímpar;

dois são pares, e dois são ímpares;

um é par, e três são ímpares;

os quatro são ímpares.

Como a diferença –tanto de dois pares quanto de dois ímpares –é par, segue que, em cada um dos casos acima, D é múltiplo de 4.

Por outro lado, qualquer número inteiro é de um dos seguintes três tipos: $3k,\ 3k+1,\ 3k+2,\ k \in Z$.

Logo, cada um dos quatro números a, b, c e d é de um desses tipos. Sendo quatro, temos que necessariamente dois deles serão do mesmo tipo. Como a diferença de dois números do mesmo tipo é sempre um múltiplo de 3, concluímos que D é múltiplo de 3.

Portanto, D é múltiplo de 12.

Progressão aritmética

São dadas duas progressões aritméticas distintas, cujos termos são números inteiros positivos. Determine condições que devem ser satisfeitas para que existam termos comuns às duas progressões.

Solução

Sejam (a_1, r) e $(\quad, r')$ as duas progressões.

Se $a_1 = \quad$, as duas progressões terão termos em comum.

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 > \quad$.

Para que existam termos em comum, é necessário que existam inteiros positivos m e n tais que $a_1 + nr = \quad + mr'$.

Portanto, $a_1 - \quad = mr' - nr$. Para que existam soluções inteiras, é necessário que $a_1 - \quad$ seja múltiplo do máximo divisor comum de r e r'.

Será que isso é possível?

Transformar $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$ numa soma do tipo $u \pm \sqrt{v}$, com u e v naturais.

Solução

Vamos olhar para $\underbrace{\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}}_{a} + \underbrace{\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}}_{b} = x.$

Usando a igualdade $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, temos:

$$x^3 = 10+10+3\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} \times \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} \times x \quad \text{ou} \quad x^3 = 20 - 6x,$$

isto é, x é a raiz de $x^3 + 6x - 20 = 0$; mas a única raiz real desta equação é 2.

Portanto,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2. \qquad (1)$$

Por outro lado,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} \times \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = -2. \qquad (2)$$

As equações (1) e (2) fornecem o sistema:

$$\begin{cases} a+b=2 \\ ab=-2 \end{cases} \text{ e obtemos } a = 1+\sqrt{3} \text{ e } b = 1-\sqrt{3}, \text{ isto é,}$$

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = 1+\sqrt{3}.$$

Qual dos dois números é o maior: 101^{50} ou $99^{50} + 100^{50}$?

Solução

Vamos provar que $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Provar essa desigualdade equivale a provar que $101^{50} - 99^{50} > 100^{50}$

ou, dividindo a inequação por 100^{50}, provar que $\left(\frac{101}{100}\right)^{50} - \left(\frac{99}{100}\right)^{50} > 1.$

Observe que $\left(\frac{101}{100}\right)^{50} - \left(\frac{99}{100}\right)^{50} = \left(1+\frac{1}{100}\right)^{50} - \left(1-\frac{1}{100}\right)^{50}.$

Usando a fórmula do binômio de Newton e juntando os termos semelhantes, obtém-se:

$$2\left[\binom{50}{1}\frac{1}{100} + \binom{50}{3}\frac{1}{100^3} + \dots\right] > 2 \times 50 \times \frac{1}{100} = 1.$$

Qual o número?

Numa classe com 12 alunos, o professor escreveu na lousa um número natural menor que 50 000 e pediu que os alunos falassem alguma coisa a respeito desse número. O primeiro aluno disse que o número era múltiplo de 2, o segundo disse que o número era múltiplo de 3, e assim sucessivamente até o último, que disse que o número era múltiplo de 13. Em seguida o professor disse que, com exceção de dois alunos consecutivos que erraram, todos os demais acertaram.

(a) quais foram os alunos que erraram?

(b) qual foi o número que o professor escreveu? Justifique suas respostas.

Solução

Analisando os pares de números consecutivos, 2 e 3; 3 e 4; 4 e 5; 5 e 6; 6 e 7; 7 e 8; 8 e 9; 9 e 10; 10 e 11; 12 e 13, é fácil verificar que se dois alunos consecutivos erraram ao afirmar que o número era múltiplo de um desses pares, então o número de alunos que erraram seria maior que 2.

Restam, portanto, os pares 8 e 9 e 7 e 9. O par que produz um número menor que 50 000 é o par 7 e 8, ao qual corresponde o número 25 740.

Qual é o maior fator primo?

Qual é o maior fator primo de $3^{14} + 3^{13} - 12$?

Solução

$3^{14} + 3^{13} - 12 = 3^{13}(3 + 1) - 3 \times 4 = 3 \times 4(3^{12} - 1) =$
$3 \times 4(3^{6} - 1)(3^{6} + 1) = 3 \times 4(3^{3} - 1)(3^{3} + 1)(3^{6} + 1) = 3 \times 4 \times 26 \times 28 \times$
$730 = 2^{6} \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 73.$

Quantos zeros?

Um múltiplo de 17, quando representado na base 2, tem exatamente 3 dígitos iguais a 1. Qual é o número mínimo de zeros que essa representação deverá conter?

Solução

Suponha que para $m \in N$:

$$17m = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} \quad \text{com} \quad 0 \leq a_1 < a_2 < a_3.$$

Temos $m = \dfrac{2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3}}{17} = q_1 + q_2 + q_3 + \dfrac{r_1 + r_2 + r_3}{17}$,

onde q_i e r_i são o quociente e resto da divisão de   por 17.

A tabela a seguir fornece resto r_n da divisão de 2^n por 17:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8	1

obtemos a menor solução para $a_1 = 0$, $a_2 = 5$ e $a_3 = 8$.

Logo, $17m = 2^0 + 2^5 + 2^8$, cuja representação na base 2 tem seis zeros.

O resto é o que importa!

Os números inteiros 1, 2, 3, ..., 1000 são escritos em ordem, em volta de um círculo. A partir do número 1, marque todo décimo quarto número, isto é, marque 1, 15, 29, 49, ..., parando no momento em que for atingido um número já marcado. Determine quantos números não marcados restam.

Solução

Na primeira etapa são marcados os números 1, 15, 29, ..., isto é, todos os números menores do que 1000 e que divididos por 14 deixam resto 1. O último número desse conjunto é 995, o que nos permite concluir que, na segunda etapa, serão marcados todos os números que divididos por 14 deixam resto 9. Um raciocínio análogo nos permite determinar o que ocorre nas etapas seguintes.

Etapa	Começa com	Termina em
2ª	9	989
3ª	3	997
4ª	11	991
5ª	5	999
6ª	13	993
7ª	7	987

É fácil ver que a próxima etapa começaria com o número 1, repetindo assim a primeira, o que nos permite concluir que o processo termina após sete etapas. Para determinar a quantidade de números marcados, a maneira direta seria somar os números de termos de cada uma das progressões aritméticas da tabela e subtrair o total de 1000. O mais simples é observar que qualquer número ímpar dividido por 14 deixa resto ímpar e, portanto, estará incluído em uma das progressões. Nenhum número par dividido por 14 deixa resto ímpar e, portanto, existem exatamente 500 números não marcados.

O baile

Numa festa, um grupo de homens e mulheres decide dançar da seguinte maneira: o primeiro homem dança com 5 mulheres, o segundo homem dança com 6 mulheres e assim sucessivamente, até que o último homem dança com todas as mulheres. Se há 10 homens, quantas vezes, em média, cada mulher dançou?

Solução

Na festa há 10 homens: h_1 , h_2, ..., h_{10}.

h_1 dança com $5 = 4 + 1$ mulheres;

h_2 dança com $6 = 4 + 2$ mulheres;

....

h_{10} dança com $4 + 10 = 14$ mulheres, que são, segundo o enunciado, todas as mulheres.

Ao todo ocorreram $5 + 6 + ... + 14 = 95$ danças. Portanto, em média cada mulher dançou $95/14 = 6{,}79$ vezes.

A ligação

Um rapaz esqueceu o último algarismo do telefone da namorada e resolveu tentar falar com ela, escolhendo ao acaso o último dígito. Se ele está num telefone público e só tem duas fichas, qual é a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada?

Solução

a) A probabilidade de que o rapaz acerte na primeira tentativa é igual a 1/10, uma vez que ele escolheu ao acaso um dos dez dígitos possíveis.

b) Para que ocorra a segunda tentativa é necessário que ele tenha errado na primeira, e a probabilidade de isso acontecer é igual a 9/10. Dado que errou na primeira tentativa, a probabilidade (condicional) de que ele acerte na segunda é igual a 1/9, uma vez que, agora, o número de dígitos possíveis é igual a 9. Logo, a probabilidade de que ele acerte na segunda tentativa é $(9/10)(1/9) = 1/10$.

Segue que a probabilidade de que ele consiga conversar com a namorada é igual a $(1/10) + (1/10) = 1/5$.

Falemos de moedas

500 moedas são distribuídas entre três pessoas: A, B e C, em círculo.

Inicialmente a pessoa A receberá 1 moeda, a B receberá 2 moedas, e a C receberá 3 moedas. Na segunda rodada A receberá 4 moedas, B receberá 5 moedas, e C receberá 6 moedas, e assim por diante.

No momento em que o processo de divisão não puder ser efetuado por falta de moedas, as restantes ficarão com a próxima pessoa.

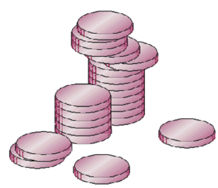
Pergunta-se:

(a) Quantas foram as moedas restantes, e quem as recebeu?

(b) Quantas moedas recebeu cada uma das três pessoas?

Solução

Foram distribuídas $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n$ moedas. Qual deve ser o valor de n para que essa soma fique o mais próxima possível de 500, porém menor do que 500?

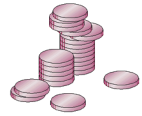


Como $1+2+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$, queremos $\dfrac{n(n+1)}{2} \approx 500$ ou

$$n(n+1) \approx 1000, \text{ o que implica } n = 31.$$

De fato, $1+2+3+\ldots+\dfrac{31\times 32}{2} = 496$. Portanto, a “penúltima” pessoa que receberá 31 moedas, e a “última” receberá as 4 restantes.

Quem são essas pessoas?



O número de moedas que A recebe, 1, 4, 7, ..., é um número da forma $3k + 1$;

O número de moedas que B recebe, 2, 5, 8, ..., é um número da forma $3k + 2$, e o número de moedas que C recebe, 3, 6, 9 ..., é um número da forma $3k$.

O número 31 é da forma $3k + 1$; logo, A receberá as 31 moedas e B receberá as 4 restantes.

Quantas moedas receberá cada uma?

A receberá 1 + 4 + 7 + ... + 31 moedas. Temos um problema de PA com $a_1 = 1$, $a_n = 31$, $r = 3$. O número de termos é 11, e a soma dos termos é 176.

C receberá 3 + 6 + 8 + ... + 30 moedas. O número de termos dessa PA é 10 e a soma 165.

B receberá 2 + 5 + 8 + .. + 29 moedas mais as quatro restantes. O número de termos dessa PA é 10 e a soma, 155.

Portanto, B receberá, ao todo, 159 moedas.

Por que meu tio não ganha na Mega Sena?

O meu tio Flávio joga na Sena fazendo 25 apostas distintas, de 6 dezenas cada uma, escolhidas ao acaso. Ele vem observando que há muito tempo todas as dezenas sorteadas pela Caixa aparecem nos seus cartões mas, infelizmente, não todas no mesmo cartão. Por quê?

Solução

O fato de os números sorteados pela Caixa estarem presentes nos cartões do tio Flávio não é de modo algum surpreendente, uma vez que, ao escolher 25 conjuntos distintos de 6 dezenas para preencher seus cartões, existe uma probabilidade razoável, cujo cálculo está longe de ser trivial, de que seu tio acabe utilizando todas as dezenas possíveis de serem sorteadas. Observe que com escolhas convenientes das dezenas, poderíamos usar as 50 dezenas em apenas 9 cartões, uma vez que $6\times 9 = 54 > 60$.

Entretanto, não há nenhuma maneira de garantir que as 6 dezenas sorteadas vão aparecer num único cartão. Jogando 25 cartões, qualquer que seja a escolha das dezenas, a probabilidade de acertar a sena principal é

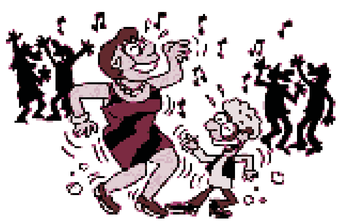
$$\frac{25}{C_{50,6}} = \frac{25\times 6!\times 44!}{50!} = \frac{1}{635628},$$

uma vez que o número de casos favoráveis é 25, em um total de $C_{50,6}$ (combinações simples de 50 objetos em grupos de 6, que é o número de possíveis escolhas de 6 dezenas nas 50 possíveis).

Como $C_{50,6} = 15890700$, para ter certeza que o tio Flávio vai ganhar, só mesmo jogando todos esses quase 16 milhões de combinações possíveis, o que seria um péssimo investimento.

O custo, considerando o preço de cada aposta igual a R$ 1,50, ficaria em torno de 22 milhões de reais, e, convenhamos, quem tem esse dinheiro disponível não deve perder tempo jogando em loterias.

Festa



Todos os convidados de uma festa trocaram apertos de mãos. Um mordomo mais atento notou que foram 528 cumprimentos e que 2/3 dos convidados eram mulheres. Quantos homens foram convidados?

Solução

Vamos indicar por x o número total de convidados.

Cada pessoa dá $x - 1$ apertos de mãos, porém, quando A cumprimenta B, B também cumprimenta A.

Logo, o número de apertos de mão é igual a $\dfrac{x(x-1)}{2}$.

Assim, $\frac{x(x-1)}{2} = 528$, ou seja $x^2 - x = 1056$.

Resolvendo a equação do 2º grau $x^2 - x - 1056 = 0$, obtemos $x = 33$ ou $x = -32$.

Como x é positivo, temos $x = 33$.

Concluímos que 11 homens (1/3 dos convidados) e 22 mulheres foram convidados para a festa.

Os problemas seguintes envolvem números primos.

Um número natural é *primo* se ele é maior do que 1 e é divisível apenas por si próprio e por 1. Da definição, decorre a seguinte seqüência de números primos:

(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37...)

e, como podemos observar, com exceção do 2, todos os demais números primos são ímpares.

Soma

Escreva o número 91 como soma de dois números primos.

Solução

Os alunos não deverão ter dificuldade em perceber que como a soma de dois ímpares é par, e como 2 é o único primo par – os números são 2 e 89. Aliás, esse pode ser um bom momento para recordar com os alunos os testes de primalidade para verificar que 89, efetivamente, é primo.

Idades

Meu irmão caçula e eu temos idades entre 10 e 20 anos, e hoje nossas idades são expressas, ambas, por números primos, fato que se repetirá pela próxima vez daqui a 18 anos. Determine minha idade, sabendo que a idade de nosso irmão mais velho, que hoje também é um número primo, é uma unidade maior do que a soma das nossas idades.

Solução

As duplas de primos entre 10 e 20 são

11 e 13, 11 e 17, 11 e 19, 13 e 17, 13 e 19 e 17 e 19.

Como a soma dos números, adicionada de 1, deve resultar um primo, descarto as duplas 11 e 13 e 13 e 19. Como daqui a 18 anos as idades voltam a ser representadas por números primos, descarto as duplas que incluem o 17. Resta apenas uma possibilidade: minha idade é 19 anos e a do meu irmão é 11 anos.

Raízes

Uma equação do 2º grau, cujos coeficientes são todos números primos, pode apresentar duas raízes iguais?

Solução

Para que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ (com a, b e c primos) admita duas raízes iguais, devemos ter $b^2 - 4ac = 0$ ou $b^2 = 4ac$, o que implica b^2 par.

Logo, b também é par e, como é primo, $b = 2$. De $b^2 = 4ac$ temos $ac = 1$, o que é absurdo para a e c primos.

Portanto, a resposta é *não*!

Coordenadas da reta

Quantos pontos da reta $y = x + 51$ são tais que as suas duas coordenadas são números primos?

Solução

Se $x = 2$, temos $y = x + 51 = 53$, que é primo. Se x for qualquer outro primo, será um número ímpar, implicando y par maior que 2, logo, não-primo. Assim, existe um único par, $(2, 53)$, da reta de equação $y = x + 51$ que tem ambas as coordenadas dadas por números ímpares.

Nota

Observe-se que, trocando o número 51 por outro valor, o problema pode tornar-se muito mais difícil. Para a reta $y = x + 2$ somos conduzidos ao conceito de "primos gêmeos" (diferem por 2 unidades). Até hoje é um problema "em aberto" saber se existem ou não infinitos pares de "primos gêmeos".

Triângulo

As medidas dos lados de um triângulo retângulo (numa mesma unidade) podem ser números primos?

Solução

A resposta é *não*. Do teorema de Pitágoras temos a igualdade $a^2 = b^2 + c^2$. Sendo a, b e c primos, não podem ser todos ímpares (pois a soma de dois ímpares é par) e, como $a > b$ e $a > c$, devemos ter $b = 2$ ou $c = 2$. Digamos $c = 2$.

Teremos então: $a^2 + b^2 = 4$, ou $(a + b)(a - b) = 4$

e analisando os possíveis valores de $a + b$ e $a - b$, que são 1, 2 ou 4, concluímos que a situação é impossível.

Circunferência

Para quantos pontos da circunferência $x^2 + y^2 = 361$ as duas coordenadas são números primos?

Solução

Se x e y satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 361$, sendo 361 ímpar, devemos ter x par, e y ímpar ou x ímpar e y par. Se x é par e primo, então, $x = 2$; logo, $y^2 = 357$, e y não é, então, um número inteiro. Do mesmo modo verificamos ser impossível ter y par e x ímpar; logo, nenhum ponto da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 361$ tem ambas as coordenadas dadas por números primos.

Triângulo acutângulo

Determine as medidas, em graus, dos ângulos internos de um triângulo acutângulo, sabendo que estas são expressas por números primos.

Solução

Se $a+b+c=180$, com a, b e c primos, não é possível ter a, b e c ímpares; logo, pelo menos um deles, digamos o a, deve ser igual a 2, o que implica $b+c=178$. Podemos ter $b=c=89$, que é primo e, por verificação direta, mostra-se que não há outra possibilidade, já que o triângulo, sendo acutângulo, implica $b<90$ e $c<90$.

Nota

A mesma pergunta sem a hipótese de ser acutângulo, exige um pouco mais de trabalho. Sem a hipótese de o triângulo ser acutângulo, obtemos, por tentativa, as possibilidades: 5 e 173, 11 e 167, 29 e 149, 47 e 131 e 71 e 107.

Divisores

Quantos divisores possui o número 2 420?

Esse exercício é uma aplicação clássica do Teorema Fundamental da Aritmética e do Princípio Fundamental da Contagem.

Solução

$2420=2^2\times 5\times 11^2$ e um divisor qualquer é obtido por um produto dos primos 2, 5 ou 11, elevados aos expoentes:

primo $2 \rightarrow$ expoente 0, 1 ou 2;

primo $5 \rightarrow$ expoente 0 ou 1;

primo $11 \rightarrow$ expoente 0, 1 ou 2.

Pelo Princípio da Contagem obtemos $3\times 2\times 3=18$ divisores.

Números naturais

Quantos são os números naturais, de 1 a 100, que podem ser escritos como um produto de dois números naturais distintos entre si e diferentes de 1?

Solução

De 1 a 100 temos 100 números. Para obtermos a resposta à nossa pergunta, subtraímos de 100 o número de primos entre 1 e 100, que é 25; o número de quadrados de números primos, que é 4, e o número 1. A resposta é 70.

Aniversário

Há dois anos, ano em que finalmente concluí meu Doutorado em Matemática, nasceu meu segundo filho, e ocorreu uma notável coincidência: meus dois filhos e eu passamos a fazer aniversário no mesmo dia do ano. A partir daí, outras coincidências aconteceram. No ano passado nossas três idades foram representadas por quadrados perfeitos e hoje, dia em que estamos comemorando mais um aniversário, percebo que nossas idades são representadas por três números primos. Supondo que vivamos cem anos cada um, pergunto: qual é minha idade hoje? Nos próximos anos, quantas vezes todas as nossas idades voltarão a ser representadas por números primos?

Solução

No ano passado meu filho caçula certamente tinha 1 ano de idade. Meu outro filho tinha 4 ou 16 anos e eu, o pai, 36 anos. Portanto, hoje, minha idade é 37 anos.

Quando a minha idade é ímpar, a do meu caçula é par e vice-versa; portanto, nunca mais nossas idades voltarão a ser todas simultaneamente representadas por números primos.

...Probleminhas

1. Marly diverte-se, observando os passarinhos voando em torno de um arbusto. Ela notou que, quando há uma ave em cada galho, uma das aves fica sem galho, e quando ficam duas aves em cada galho, um dos galhos fica sem ave. Quantos galhos há no arbusto? E quantas aves?

2. Uma torneira enche um tanque em 4 horas. O ralo do tanque pode esvaziá-lo em 3 horas. Estando o tanque cheio, abrimos simultaneamente a torneira e o ralo. O que acontece com o tanque?

3. Divida um bolo circular em 4 partes iguais, sem tirar a faca do bolo e sem percorrer duas vezes o mesmo corte.

4. Uma determinada espécie de alga se reproduz, dividindo-se em 2 a cada dia. Assim, no primeiro dia temos 1, no segundo, 2, no terceiro 4, no quarto, 8, e assim por diante. Se, começando por uma dessas algas, precisamos de 30 dias para preencher determinado volume, em quanto tempo preenchemos o mesmo volume, se começarmos com duas das referidas algas?

5. Esta manhã, após minhas aulas, desci a escada, pois o elevador estava quebrado. Eu já havia descido 7 degraus, quando vi o prof. Zizoloziz começando a subir a escada. Continuei no meu passo usual, cumprimentei o professor quando ele passou e, para minha surpresa, faltando 4 degraus para eu acabar de descer, o professor tinha chegado ao topo da escada. "Enquanto desço 1 degrau, ele sobe 2", eu pensei.
Quantos degraus tem a escada?

6. Um industrial produz uma máquina que endereça 500 envelopes em 8 minutos. Ele deseja construir mais uma

máquina, de tal forma que ambas, operando juntas, endereçarão 500 envelopes em 2 minutos. Determine o tempo que a segunda máquina sozinha deve gastar para endereçar 500 envelopes.

7. 36 alunos de uma determinada escola prestaram exames vestibulares em duas universidades, A e B, sendo que, desse grupo de alunos, todos os aprovados em A também foram aprovados em B e o número de aprovados em B foi o triplo do número de aprovados em A. Se foram aprovados menos da metade e mais de um terço desses alunos, quantos não foram aprovados em nenhuma das duas universidades?

8. João, parado na porta de sua casa, conta as pessoas que passam em ambas as direções. Pedro caminha ida e volta no quarteirão da casa de João e contas as pessoas com as quais cruza, em ambas as direções. Quem conta mais?

9. Dispomos de quatro cores distintas e precisamos colorir o mapa da figura com os países P, Q, R e S, de modo que países cuja fronteira é uma linha não podem ser coloridos com a mesma cor. De quantas maneiras é possível colorir o mapa, se:

(a) P e S forem coloridos com cores distintas?

(b) P e S forem coloridos com a mesma cor?

P	Q
R	S

10. É possível colocar inteiros positivos nos 21 espaços vazios da tabela abaixo, de modo que os números em cada linha e em cada coluna estejam em progressão aritmética. Determine o número assinalado com o asterisco.

			*	
	74			
				186
		103		
0				

Respostas dos probleminhas

1. 4 aves e 3 galhos
2. o tanque esvazia em 12 horas
3. partindo do centro do bolo de raio *r*, descreva um "oito" com a faca, de modo que as duas circunferências que formam o "oito" tenham raio *R*/2.
4. 29 dias. É como se começássemos no 2º dia.
5. 22 degraus
6. 8/3 min
7. 21
8. Contam o mesmo número.
9. (a) 48.
   (b) 36.
10. 142.